Vorlesungen

über

Photographische Optik

von

Dr. Alexander Gleichen
Regierungsrat und Privatdozent

Mit 63 Figuren

Leipzig
G. J. Göschen'sche Verlagshandlung
1905

Vorlesungen

über

Photographische Optik

von

Dr. Alexander Gleichen
Regierungsrat und Privatdozent

Mit 63 Figuren

Leipzig
G. J. Göschen'sche Verlagshandlung
1905

Spamersche Buchdruckerei, Leipzig.

Vorwort.

Die nachfolgende Darstellung der photographischen Optik ist im wesentlichen eine Wiedergabe der Vorlesungen, die ich im Wintersemester 1902 — 1903 an der Technischen Hochschule zu Charlottenburg-Berlin gehalten habe. Für die freundliche Hilfe bei der Besorgung der Korrektur sage ich Herrn Dr. Max Blanckmeister meinen verbindlichsten Dank.

Berlin, Juni 1905.

Alexander Gleichen.

Inhaltsverzeichnis.

Kapitel 1. Die physikalischen und geometrischen Grundlagen der Bilderzeugung.

Kapitel 2. Die Bilderzeugung durch zentrierte Kugelflächen im paraxialen Gebiete.

Kapitel 3. Die Strahlenbegrenzung.

Kapitel 4. Die Achromasie.

Kapitel 5. Das Seidelsche Gebiet und die Petzval-Bedingung.

Kapitel 6. Die Wellenfläche und die Hamiltonsche Funktion. Der endliche Strahlengang.

Kapitel 7. **Bedingung für die Aberrationsfreiheit von Punktepaaren bei endlichem Strahlengange.**

Kapitel 8. **Der Astigmatismus.**

Kapitel 9. Die natürliche Blende und die Abbildung durch Fundamentalstrahlen.

Kapitel 10. Orthoskopie und Helligkeit.

Kapitel 11. Die symmetrischen Objektive.

Kapitel 12. Geometrische Konstruktionen gebrochener Strahlen und Strahlenbündel.

Kapitel 13. Historische Notizen und Konstruktionsdaten einiger Objektive.

Kapitel 14. **Die Technik der Durchrechnung.**

Kapitel 1.

Die physikalischen und geometrischen Grundlagen der Bilderzeugung.

§ 1. Die Grundlagen der geometrisch-optischen Abbildungslehre.

Über das ureigenste Wesen des Lichtes sind in der Wissenschaft auch heute die Akten noch nicht geschlossen. Wie sich im Anfang vorigen Jahrhunderts noch die Emissionstheorie und die Undulationstheorie gegenüberstanden, so hat die letztere in neuerer Zeit wieder eine Konkurrentin in der sogenannten elektromagnetischen Lichttheorie erhalten. Ja es erscheint nicht unmöglich, daß namentlich infolge der Erfahrungen mit den seit kurzem entdeckten radioaktiven Substanzen die Lehre von den Strahlungen und damit auch vom Licht wieder eine Änderung erfährt, und die Wissenschaft sich wieder mehr den Vorstellungen der Newtonschen Emissionstheorie nähert. So verschieden jedoch die Prinzipien sind, aus denen diese verschiedenen Theorien sich entwickeln, so stimmen sie doch in der mathematischen Formulierung ihrer weiteren Konsequenzen im wesentlichen überein, wie es ja auch nicht anders sein kann, da jede dieser Theorien die Aufgabe zu lösen hat, die durch Beobachtung und Experiment festgestellten Äußerungen der Naturkraft „Licht" als Konsequenzen ihrer ersten Annahmen darzustellen. Die allgemeinste Theorie der optischen Instrumente wäre aus den Prinzipien dieser Theorien zu entwickeln und müßte insbesondere die Erscheinungen der Interferenz und Beugung des Lichtes berücksichtigen. Hierzu liegt jedoch meines Erachtens zurzeit — wenn man von der Abbildung von Strukturen durch ein Mikroskop und von der Verwendung sehr enger Blenden absieht — deshalb kein zwingender Grund vor, weil die einschlägigen Bemühungen noch zu keinem abschließenden Erfolg geführt haben*), und weil sich die Theorie der photographisch-optischen Systeme mit

*) Vgl. z. B. Carl Strehl: Theorie des Fernrohres. Leipzig 1894.

genügender Sicherheit aus der allgemeinen geometrischen Abbildungslehre entwickeln läßt.

Für die geometrische Theorie der optischen Instrumente, insbesondere der photographischen Objektive, sind nur einige wenige Sätze über die Natur des Lichtes erforderlich, Sätze, deren Gültigkeit nicht nur zufolge jeder der oben genannten Theorien besteht, sondern die auch durch die sorgfältigsten experimentellen Messungen auf das Sicherste bestätigt werden.

Die drei wichtigsten dieser Sätze sind:

1. Das Licht breitet sich streng geradlinig aus, wenn es seine Fortbewegung ungestört ausführen kann. Die gerade Linie, in der sich das Licht bewegt, heißt „Lichtstrahl“.

2. Wenn ein Lichtstrahl auf einen Spiegel fällt, so wird er unter demselben Winkel zurückgeworfen, unter dem er aufgefallen ist. Dabei liegen der einfallende und der zurückgeworfene Strahl in einer Ebene, die zugleich das Einfallslot enthält, d. h. eine Senkrechte zum Spiegel, die in dem Punkte errichtet ist, in welchem der auffallende Strahl die spiegelnde Fläche trifft (Reflexionsgesetz).

3. Wenn ein Lichtstrahl auf die glatte Oberfläche eines durchsichtigen Körpers fällt, so wird er von seiner ursprünglichen Richtung abgelenkt (gebrochen). Das Gesetz dieser Ablenkung läßt sich folgendermaßen angeben: In dem Punkte, wo der auffallende Strahl die brechende Fläche trifft, errichte man das Einfallslot, d. h. die Normale zur Fläche. Es liegen dann der einfallende Strahl, der gebrochene Strahl und das Einfallslot in einer Ebene, der sogenannten Brechungsebene. Nennt man ferner den Winkel, welchen der einfallende Strahl mit dem Einfallslot bildet, i und den Winkel, welchen der gebrochene Strahl mit dem Einfallslot bildet, i', so ist

Fig. 1.

$$n \sin i = n' \sin i' , \tag{1}$$

wo n und n' Größen sind, die nur von der Natur der beiden Medien abhängen, an deren Trennungsfläche die Brechung stattfindet (Brechungsgesetz [Fig. 1]).

In dem unter 1. ausgesprochenen Satz über die geradlinige Fortpflanzung des Lichtes bedarf das Wort „ungestört“ noch einer Erklärung. Der Satz von der geradlinigen Fortpflanzung des Lichtes verliert nämlich seine Gültigkeit, wenn man das Licht zwingt, durch

kleine Öffnungen hindurchzugehen. Wie Theorie und Erfahrung lehren, treten alsdann Lichtbündel von abwechselnd größerer und geringerer Intensität und Neigung zur ursprünglichen Bewegungsrichtung auf. Diese Erscheinungen — die sogenannte Beugung des Lichtes — werden um so ausgeprägter, je kleiner die betreffenden Öffnungen sind.

Hiernach ist es also nicht möglich, den Satz von der geradlinigen Fortpflanzung des Lichtes etwa dadurch experimentell zu prüfen, daß man sich ein möglichst dünnes Lichtbündel als Äquivalent für einen Lichtstrahl herzustellen sucht, indem man Licht durch eine möglichst enge Öffnung hindurchtreten läßt. Im Gegenteil, je mehr man sich auf diesem Wege seinem Ziele zu nähern sucht, um so mehr entfernt man sich davon. Während man also die geometrischen Bedingungen für die Existenz eines Lichtstrahles zu erfüllen sucht, zerstört man die physikalischen Voraussetzungen der geradlinigen Fortpflanzung des Lichtes.

Für die Theorie der photographischen Objektive spielt, wie schon erwähnt, die Beugung keine große Rolle, da die hier in Frage kommenden Öffnungen (Blendenöffnungen, Ränder der Linsen) meist so groß sind, daß wir unsern Satz 1 als uneingeschränkt gültig annehmen können.

§ 2. Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes. Brechungsexponent.

Nach dem heutigen Stande der Wissenschaft haben wir uns den Weltraum mit „Lichtäther“ angefüllt zu denken, einem Medium, dessen Eigenschaften wir mangels direkter Experimente nur durch theoretische Überlegungen einigermaßen kennen. Im Gegensatz zur Materie sind wir gezwungen, diesem Medium die „Wägbarkeit“ abzusprechen. Die Geschwindigkeit, mit der sich ein Lichtstrahl im Äther fortbewegt, sei v_0. Ist dann die Geschwindigkeit in irgend einem anderen Medium, z. B. Luft, Wasser, Glas, v, so ist der Brechungsexponent n dieses letzteren Mediums definiert durch die Gleichung:

$$n = \frac{v_0}{v} . \tag{2}$$

Für ein beliebiges zweites Medium, in dem sich das Licht mit der Geschwindigkeit v' fortbewegt, erhält man analog den Brechungsexponenten n'

$$n' = \frac{v_0}{v'} . \tag{3}$$

Hiernach läßt sich Gleichung (1) auch schreiben:

$$\frac{\sin i}{v} = \frac{\sin i'}{v'} .$$

Aus Gleichung (2) und (3) folgt ferner:

$$\frac{n}{n'} = \frac{v'}{v} \text{*)} . \tag{4}$$

§ 3. Dispersion.

Ein weißer Lichtstrahl wird, wenn er auf die glatte Oberfläche eines durchsichtigen Mediums fällt, nicht nur gebrochen, sondern er wird gleichzeitig in eine, streng genommen, unendlich große Anzahl von farbigen Strahlen zerlegt, welche sich fächerförmig voneinander trennen, woraus man schließen muß, daß jedem Farbenstrahl ein besonderer Brechungsexponent zukommt. Die Reihenfolge dieser Farben ist gewöhnlich: rot, orange, gelb, grün, blau, indigo, violett. Doch sind zwischen den genannten, besonders ins Auge springenden Farben alle möglichen Zwischenstufen vorhanden. Diesen Vorgang erklärt man sich so, daß man das weiße Licht als ein inniges Gemisch aller Farbenstrahlen betrachtet. Aus dieser Annahme folgt dann weiter, daß sich die farbigen Lichtstrahlen im Weltraum, d. h. im Äther, sämtlich mit derselben Geschwindigkeit fortpflanzen müssen, denn sonst müßten von einem Stern, z. B. von einem Monde des Jupiter, der aus dem Schatten des Planeten tritt, zunächst farbiges und später erst weißes Licht zu uns gelangen, was jedoch niemals beobachtet ist. Diese konstante Geschwindigkeit v_0 des Lichtes jeder Farbe im Äther ist eine der wichtigsten physikalischen Konstanten, und man hat für sie nach verschiedenen Methoden den mittleren Wert:

$$v_0 = 300000 \text{ km per Sekunde} \tag{5}$$

gefunden.

In Figur 2 sei AB ein einfallender weißer Lichtstrahl; im Punkte B der Trennungsfläche LL_1 der beiden Medien mit den

---

*) Nach der Wellentheorie verhalten sich also die Brechungsexponenten umgekehrt wie die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in zwei Medien. Nach der Emissionstheorie sind die Brechungsexponenten den Geschwindigkeiten direkt proportional. Nach der elektromagnetischen Lichttheorie ist der Brechungsexponent gleich der Quadratwurzel aus dem Quotienten der Dielektrizitätskonstanten der beiden Medien.

Brechungsexponenten n und n' ist das Einfallslot NBN' gezeichnet, so daß also $\sphericalangle ABN = i$ der Einfallswinkel ist. Der weiße Strahl AB zerlegt sich bei B in Farbenstrahlen, von denen jedoch nur drei, nämlich BC, BD und BF, gezeichnet sind, welche etwa dem roten, gelben und violetten Lichte entsprechen mögen.

Man sieht also aus der Figur 2, daß die roten Strahlen am wenigsten, die violetten am meisten abgelenkt werden. Für jeden dieser Strahlen muß natürlich das Brechungsgesetz gelten. Der Einfallswinkel i ist jedoch für alle Farben derselbe, der Brechungswinkel i' dagegen hat für jede Farbe einen besonderen Wert, was nur dadurch erklärlich ist, daß der Wert n' für die verschiedenen Farben verschieden ist. Für die gezeichneten drei Strahlen seien etwa die Brechungsexponenten im zweiten Medium n'_C, n'_D, n'_F, wo die Indizes C, D, F auf die Farben rot, gelb, violett hinweisen sollen.

Fig. 2.

Das Brechungsgesetz für diese drei Strahlen wäre dann entsprechend:

$$n \sin i = n'_C \sin i'_C = n'_D \sin i'_D = n'_F \sin i'_F \,. \tag{6}$$

Der Einfachheit der Betrachtung halber setzen wir $n = 1$, d. h. wir nehmen an, daß das Medium links von LL_1 der Äther wäre. Wir können jedoch — für die Zwecke der photographischen Optik mit genügender Genauigkeit — auch annehmen, daß der Raum links von LL_1 mit Luft gefüllt sei, da deren Brechungsexponent der Eins außerordentlich nahe kommt.

§ 4. Fraunhofersche Linien.

Untersucht man den Farbenfächer von Strahlen genauer, wobei es allerdings zur bequemeren Beobachtung notwendig wird, ihn noch einmal einer Brechung an einer Planfläche zu unterwerfen und ihn in Luft austreten zu lassen (Brechung durch ein Prisma gemäß Figur 3), so beobachtet man bei Benutzung von Sonnenlicht, Hunderte von schwarzen oder besser lichtleeren Strahlen, die in ganz unregelmäßiger Folge dem Farbenfächer zwischengemengt erscheinen. Fängt man den Strahlenfächer auf einem Papierschirm RR_1 (Fig. 3) auf, so würden sich diese schwarzen Strahlen auf der Lichtlinie PQ als schwarze Punkte kenntlich machen. Bei der praktischen Ausführung dieses

Experimentes bedient man sich — da man einen isolierten weißen Lichtstrahl nicht herstellen kann, eines sehr schmalen Spaltes SS_1 (Fig. 3), durch den man das weiße Licht gehen läßt. Die Längsausdehnung dieses Spaltes würde bei der Darstellung gemäß Figur 3 senkrecht zur Papierebene vorzustellen sein. An Stelle einer der in Figur 3 dargestellten Lichtlinien entsteht also tatsächlich ein Lichtband, ein sogenanntes Spektrum, auf dem sich die oben erwähnten schwarzen Strahlen als dunkle, zur Papierebene senkrecht stehende, gerade Linien zeigen. Diese dunklen Linien werden nach ihrem Entdecker Fraunhofersche Linien genannt. Wegen ihrer Feinheit sind sie ohne Zuhilfenahme besonderer optischer Hilfsmittel nicht zu sehen. Diese Linien kann man hinsichtlich ihrer unregelmäßigen Verteilung mit den Sternen des Himmels vergleichen und kann den Vergleich auch insofern ausdehnen, als bei steigender Vergrößerung, die man bei der Betrachtung verwendet, immer neue Linien auftauchen und manche vorher als einfach gesehenen sich in Doppellinien auflösen, ähnlich wie dies bei der Betrachtung der Doppelsterne der Fall ist.

Fig. 3.

Es würde den Rahmen dieses Buches überschreiten, wollten wir auf die physische Entstehung dieser Linien näher eingehen, wodurch wir auf das Gebiet der Spektralanalyse geführt würden, ein Gebiet, auf dem die Wissenschaft die weittragendsten Entdeckungen in den letzten 50 Jahren gemacht hat. Wir beschränken uns auf die Notiz, daß die physische Ursache dieser Linien in Absorptionsvorgängen der den festen Sonnenball umgebenden Photosphäre zu suchen ist, und weisen hier nur auf diejenigen Eigenschaften hin, welche für die geometrische und damit auch für die photographische Optik von Wichtigkeit sind.

Die stärksten der im Sonnenspektrum auftretenden Linien hat schon Fraunhofer mit den Buchstaben A bis H bezeichnet, von denen A, B, C im roten, D im gelben, E im grünen, F, G, H im blauen und violetten Teile des Spektrums liegen.

§ 5. Begriff der Farbe.

Dem Konstrukteur optischer Systeme stehen heute eine große Anzahl von Glassorten mit optisch sehr differenten Eigenschaften hinsichtlich der Größe der Brechungsexponenten und der Farbenzerstreuung zur Verfügung. Aber alle diese Gläser zeigen die Fraunhoferschen Linien in derselben Reihenfolge — und zwar liegt eine bestimmte Linie immer bei derselben Farbe. Diese letztere Tatsache ist von grundlegender Bedeutung für die Berechnung optischer Instrumente, denn hierdurch erst sind wir in der Lage, an Stelle des etwas unsicheren Begriffes der „Farbe" ein Zahlenverhältnis zu setzen und damit die Rechnung auf eine sichere Grundlage zu stellen.

Im übrigen ist bei den verschiedenen Glassorten der oben schon mehrfach erwähnte Strahlenfächer, den ein weißer Lichtstrahl erzeugt, ganz verschieden geartet. Bei einigen — den stark zerstreuenden Flintgläsern — ist er weiter geöffnet als bei den sogenannten Crowngläsern. Bei den ersteren ist insbesondere der blaue Teil ausgedehnter, und der rote erscheint zusammengeschoben. Aber wie sich auch bei den verschiedenen Glassorten die einzelnen Teile des Farbenfächers verschieben mögen, die Fraunhoferschen Linien machen diese Bewegung mit und stellen somit die Lage der Farben auf das Genaueste fest. Experimentell beobachtet man diese Verhältnisse an dem durch ein Prisma aus der betreffenden Substanz erzeugten Spektrum. Wichtig ist zu bemerken, daß man an den Stellen des Spektrums, wo gewisse Fraunhofersche Linien erscheinen, einzelne helle Linien hervorrufen kann. Läßt man z. B. an Stelle des weißen Lichtes ein von einer mit Kochsalz gelb gefärbten Spiritusflamme ausgehendes Strahlenbündel auf ein Prisma fallen, so entsteht ein Spektrum, das auf dunklem Grunde an der Stelle, wo das Sonnenlicht die D-Linie erzeugt hätte, eine helle gelbe Linie zeigt. Wir haben also in bezug auf die D-Linie jetzt gewissermaßen eine Umkehrung des Spektrums. Derartige helle Linien, die in bezug auf eine oder eine Gruppe von Fraunhoferschen Linien deren Umkehrung darstellen, lassen sich mit Hilfe glühender Gase vielfach erzeugen. In unserem Beispiel (Kochsalzflamme) ist der glühende Natriumdampf die Ursache der gelben Linie. Betreffs der hierbei in die Erscheinung tretenden hochwichtigen physikalischen Vorgänge müssen wir auf die Spezialwerke der Spektroskopie verweisen.

Wir bemerken nur noch, daß man mittels gewisser glühender Gase auch helle Linien erzeugen kann, die nicht immer genau mit den Fraunhoferschen dunklen Linien zusammenfallen. Diese hellen Linien

verhalten sich aber im gewissen Sinne genau wie Fraunhofersche Linien, d. h. mit was für einem Prisma man immer das Spektrum erzeugen mag, immer stehen sie bei ein und derselben Farbe, zu deren Bestimmung sie demnach dienen können. Solche Linien entstehen z. B., wenn man einen elektrischen Strom durch eine mit verdünntem Wasserstoff gefüllte sogenannte Geißlersche Röhre gehen läßt.

Gewöhnlich bestimmt man die Brechungsexponenten für eine Anzahl Fraunhoferscher Linien und hängt dann den Buchstaben der Linie als Index an. So bedeutet n_D den Brechungsexponenten, welchen das gelbe Licht an der Stelle der Fraunhoferschen D-Linie hat. Zuweilen entwirft man auch, wie oben schon angedeutet, mittels glühender Gase ein aus Linien bestehendes Spektrum, für die man dann die Brechungsexponenten bestimmt.

§ 6. Die optischen Gläser.

Für einen Konstrukteur optischer Systeme ist ein unentbehrliches Requisit das Produktionsverzeichnis einer großen Glasschmelzerei, in dem die verschiedenen Gläser sich nach ihren optischen Eigenschaften durch die Brechungsexponenten genau charakterisiert finden. Wir werden uns in folgendem vorzugsweise auf das Produktionsverzeichnis der weltberühmten Glasschmelzerei von Schott und Gen. in Jena beziehen. In dieser Werkstätte werden zur Bestimmung der Brechungsexponenten der verschiedenen Farben folgende Linien benutzt, die sich leicht mittels künstlicher Lichtquellen herstellen lassen:

1. die rote Kalilinie, die sehr nahe mit der Fraunhoferschen Linie A zusammenfällt — sie wird mit A' bezeichnet;

2. die gelbe Natriumlinie — sie fällt mit der Fraunhoferschen D-Linie zusammen;

3. die drei hellen Linien des Wasserstoffspektrums, von denen die beiden ersten mit den Fraunhoferschen Linien C und F identisch sind, und die dritte, welche mit G' bezeichnet wird, der Fraunhoferschen Linie G sehr nahe ist.

Für diese fünf Linien und für jede Glassorte finden wir in dem Produktionsverzeichnis von Schott und Gen. die Brechungsexponenten $n_{A'}$, n_C, n_D, n_F und $n_{G'}$ angegeben, und zwar geschieht die Angabe in folgender Weise:

Betrachten wir etwa das die Fabrikationsnummer 0.60 tragende Kalksilikat-Crown-Glas, so finden wir zunächst den Brechungsexponenten für die gelbe D-Linie

$$n_D = 1{,}5179 \,,$$

welcher nahezu der hellsten Stelle des Spektrums entspricht und als mittlerer Brechungsexponent bezeichnet wird. Alsdann folgen die Differenzen

$$\left.\begin{aligned} n_F - n_C &= 0{,}00860 \\ n_D - n_{A'} &= 0{,}00553 \\ n_F - n_D &= 0{,}00605 \\ n_{G'} - n_F &= 0{,}00487 \end{aligned}\right\} \text{Crown 0.60.}$$

Aus diesen Differenzen können mit Berücksichtigung des Wertes von n_D ohne weiteres die Brechungsexponenten selbst berechnet werden.

Wir geben hier noch die Daten für ein zweites Glas:

Silikat-Flintglas 0.103.

$$\begin{aligned} n_D &= 1{,}6202 \\ n_F - n_C &= 0{,}01709 \\ n_D - n_{A'} &= 0{,}01034 \\ n_F - n_D &= 0{,}01220 \\ n_{G'} - n_F &= 0{,}01041\,. \end{aligned}$$

Ein Blick auf die beiden Zahlenreihen zeigt den verschiedenen Gang der Dispersion in den beiden Glassorten. Vergleicht man z. B. die Intervalle $n_F - n_C$ für beide Gläser, nämlich 0,00860 und 0,01709, so findet man, daß sie im Verhältnis 1,987 zu 1 stehen. Die Zahlen für die anderen Intervalle stehen aber durchaus nicht in demselben Verhältnis, woraus wir schließen, daß das Spektrum des Flintglases dem des Crownglases durchaus nicht ähnlich ist, eine Tatsache, auf die wir später noch zurückkommen werden.

Die Größe $n_F - n_C$ wird auch als mittlere Dispersion bezeichnet.

Wir verlassen jetzt diesen Gegenstand, um ihn später wieder aufzunehmen. In den nachfolgenden Betrachtungen setzen wir immer homogenes Licht, d. h. Licht, welches einer bestimmten Fraunhoferschen Linie entspricht, voraus, wobei man meist stillschweigend das gelbe Licht der D-Linie als vorhanden annimmt.

§ 7. Allgemeine Übersicht über den Strahlengang.

Die photographischen Objektive, wie überhaupt die meisten optischen Instrumente bilden ein sogenanntes zentriertes System brechender Kugelflächen, d. h. sie sind aus Glaslinsen zusammengesetzt mit begrenzenden Kugelflächen, deren Mittelpunkte sämtlich auf einer Geraden liegen, die man als „optische Achse“ bezeichnet.

Die Brechung und Zerstreuung der Lichtstrahlen werden uns nun in folgendem beschäftigen.

Stellen wir uns ein solches zentriertes System vor und einen Punkt P an einer beliebigen Stelle vor diesem System (im Objektraum), so werden die von P auf das System fallenden Strahlen so oft gebrochen, als brechende Flächen vorhanden sind, und treten dann in den Raum hinter dem System, den Bildraum, aus. Diese austretenden Strahlen bilden ein fast unentwirrbares Durcheinander von Strahlen, indem sie sich teils schneiden teils kreuzen. Die sich schneidenden Strahlen bilden im allgemeinen zwei im Raume getrennt liegende Flächen mit charakteristischen Rückkehrkanten. Im allgemeinen Falle kann man also gar nicht davon reden, daß die von P ausgehenden Strahlen im Bildraum einen Bildpunkt erzeugen. Stellt man sich ferner an Stelle eines leuchtenden Punktes ein leuchtendes Objekt vor, von dessen sämtlichen Punkten nach der Brechung derartige Flächen (kaustische Flächen) erzeugt werden, und bedenkt, daß sich infolge der Farbenzerstreuung unendlich viele solcher von den verschiedenen Farben herrührender Flächensysteme übereinander lagern, so erscheint es fast wunderbar, daß es gelungen ist, weit geöffnete zentrierte Systeme zu konstruieren, die unter Beseitigung der Farbenabweichung innerhalb eines Winkelraumes von 90^0 und darüber scharfe Bilder liefern.

Es ist jetzt unsere Aufgabe, diejenigen Bedingungen aufzusuchen, welche das System erfüllen muß, damit es als photographisches Objektiv brauchbar wird, d. h. daß es sehr entfernte Gegenstände auf der Mattscheibe scharf und unverzerrt abbildet. Wir könnten diese Aufgabe so angreifen, daß wir von dem oben skizzierten allgemeinen Falle ausgehend untersuchten, unter welchen Bedingungen sich dieser scheinbar regellose Strahlenverlauf in gewünschter Weise ordnet. Dieser vom wissenschaftlichen Standpunkt aus sehr empfehlenswerte Weg hat jedoch für den Anfänger wegen der Allgemeinheit der Betrachtungen bedeutende Schwierigkeiten. Wir werden deshalb zunächst einige besonders wichtige Spezialfälle erledigen und die allgemeinen Betrachtungen uns für den zweiten Abschnitt dieses Buches vorbehalten.

§ 8. Das Seidelsche und das paraxiale Gebiet.

Sei in Figur 4 LL_1 die optische Achse eines zentrierten Systemes, so nennt man jede durch diese Achse gelegte Ebene einen Hauptschnitt, für den wir gewöhnlich die Papierebene annehmen wollen. Sei nun AB ein Lichtstrahl in diesem Hauptschnitt, der die Achse

in C schneidet und mit ihr einen Winkel u bildet, so ist bekanntlich

$$\sin u = u - \frac{u^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{u^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \ldots,$$

$$\cos u = 1 - \frac{u^2}{1 \cdot 2} + \frac{u^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \ldots.$$

Nimmt man an, daß die in Frage kommenden Strahlen nur geringe Winkel u mit der Achse bilden, so sind wegen der Kleinheit von u die höheren Potenzen dieser Größe in obigen beiden Reihen äußerst klein. Vernachlässigen wir daher alle diese Potenzen, welche größer sind als die dritten, so erhalten wir

$$\sin u = u - \frac{u^3}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

$$\cos u = 1 - \frac{u^2}{1 \cdot 2}.$$

Unter diesen beschränkten Voraussetzungen ist das Problem der Strahlenbrechung durch zentrierte Systeme schon mehrfach behandelt worden, zuerst in voller Allgemeinheit von Seidel, weshalb wir das Gebiet, in dem diese Voraussetzungen gelten, das Seidelsche nennen wollen. Seidel hat gefunden, daß fünf Bedingungen erfüllt sein müssen, damit alle Punkte des Objektraumes „kollinear" im Sinne der neueren Geometrie im Bildraume abgebildet werden. Die Seidelschen Bedingungen haben für die photographische Optik nur geringes Interesse, weil die Voraussetzung geringer Strahlenneigungen hier meist nicht zutrifft, und wir werden deshalb auch nur in wenigen Fällen auf dieses Gebiet unsere Betrachtungen lenken.

Fig. 4.

Setzt man die Strahlenneigungen zur Achse außerordentlich klein voraus, so daß man auch noch die zweiten und dritten Potenzen der Größen u vernachlässigen kann, so werden die obigen Reihen:

$$\sin u = u,$$

$$\cos u = 1.$$

Hieraus ergibt sich noch unmittelbar:

$$\operatorname{tg} u = u.$$

Das so definierte Gebiet nennen wir das paraxiale oder das Gaußsche. Es bildet einen fadenförmigen Raum um die Achse herum, in dem alle in Betracht kommenden Strahlen verlaufen. Der An-

schaulichkeit wegen sind in den nachfolgenden zeichnerischen Darstellungen die Winkel immer stark übertrieben.

Das paraxiale Gebiet hat für die Theorie aller optischen Instrumente eine hervorragende Wichtigkeit, weil es in erster Annäherung über die Lage und Größe der Bilder orientiert und damit den allgemeinen Charakter der optischen Systeme kennzeichnet. Wir werden uns deshalb mit den in diesem Gebiete herrschenden Gesetzen ausführlich beschäftigen.

Um einen Überblick zu geben, inwieweit für kleine Winkel die letzten Gleichungen richtig sind, geben wir die folgende kleine Tabelle für 1° bis 10° genau auf vier Dezimalen:

u	u im Bogenmaß	$\sin u$	$\operatorname{tg} u$	$\cos u$
1°	0,0175	0,0175	0,0175	0,9999
2°	0,0349	0,0349	0,0349	0,9994
3°	0,0524	0,0523	0,0524	0,9986
4°	0,0698	0,0698	0,0699	0,9976
5°	0,0873	0,0872	0,0875	0,9962
6°	0,1047	0,1045	0,1051	0,9945
7°	0,1222	0,1219	0,1228	0,9925
8°	0,1396	0,1392	0,1405	0,9903
9°	0,1571	0,1564	0,1584	0,9877
10°	0,1745	0,1736	0,1763	0,9848

Kapitel 2.

Die Bilderzeugung durch zentrierte Kugelflächen im paraxialen Gebiete.

---

§ 9. Brechung eines Strahles an einer Kugelfläche.

In Figur 5 sei CD eine Kugelfläche vom Radius r, welche zwei Medien von den Brechungsexponenten n und n' voneinander trennt. Die Lichtrichtung sei hier wie auch in folgendem immer von links nach rechts. Es sei ferner ein leuchtender Punkt P im Objektraume gegeben, den wir mit dem Mittelpunkte M der brechenden

Fig. 5.

Fläche verbinden. Die Gerade PM wählen wir als optische Achse und bezeichnen ihren Schnittpunkt mit der brechenden Fläche als Scheitel S. Ein von P unter beliebiger Achsenneigung ausgehender Strahl treffe die Kugelfläche in S' und werde nach dem Achsenpunkte P' gebrochen. Das Einfallslot im Punkte S' ist durch den Radius MS' resp. dessen Verlängerung $S'N$ dargestellt. Einfallswinkel ist $PS'N = i$, Brechungswinkel $P'S'M = i'$. Ferner setzen wir $PS' = A$ und $P'S' = A'$.

Aus der Figur ergibt sich unmittelbar, daß man hat:

$$\triangle PS'M + \triangle MS'P' = \triangle PS'P'$$

oder

$$\frac{A\,r}{2}\sin(180 - i) + \frac{r\,A'}{2}\sin i' = \frac{A\,A'}{2}\sin(180 - [i - i']) .$$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit $2\,n$, dann wird

$$n\,A\,r\sin i + n\,r\,A'\sin i' = n\,A\,A'\sin(i - i') ,$$

nach dem Brechungsgesetz ist aber

$$n\sin i = n'\sin i' .$$

Demnach wird

$$A\,r\,n'\sin i' + n\,r\,A'\sin i' = n\,A\,A'\sin(i - i') ;$$

wenn wir nun noch durch $r\,A\,A'\sin i'$ dividieren, so wird

$$\frac{n'}{A'} + \frac{n}{A} = \frac{n\sin(i - i')}{r\sin i'} . \tag{7}$$

Dies ist nun der gewünschte Zusammenhang zwischen A und A'. Man kann A' aus dieser Gleichung berechnen, wenn die Größen A, n, n' und i gegeben sind, indem sich mit Hilfe des Brechungsgesetzes auch i' berechnen läßt. Man sieht also, daß, wenn sich i ändert, sich auch i' und somit die Lage des Punktes P' ändern wird. Wir werden also für verschiedene von P ausgehende Strahlen immer andere Schnittpunkte mit der optischen Achse erhalten, d. h. die von einem Punkte P ausgehenden Strahlen werden nach der Brechung nicht mehr durch ein und denselben Punkt gehen. Diese Erscheinung ist bekannt unter dem Namen: sphärische Aberration einer Kugelfläche; sie ist eine derjenigen Erscheinungen, welche die Güte der Bilder beeinträchtigen.

Gehen wir jetzt zum paraxialen Gebiete über, so können wir setzen:

$$\sin i = i , \quad \sin i' = i' , \quad \sin(i - i') = i - i' ,$$

und das Brechungsgesetz nimmt die Gestalt

$$n\,i = n'\,i' \tag{8}$$

an. Dabei wandert der Punkt S' nach S zu, so daß wir die Strecken A und A' mit $PS = a$ und $P'S = a'$ als zusammenfallend uns denken können. Unter diesen Umständen liefert Gleichung (7)

$$\frac{n}{a} + \frac{n'}{a'} = \frac{n}{r}\left(\frac{i}{i'} - 1\right) ,$$

woraus sich unter Berücksichtigung von (8) ergibt:

$$\frac{n}{a} + \frac{n'}{a'} = \frac{n' - n}{r}, \tag{9}$$

eine Fundamentalgleichung der Dioptrik.

Diese Gleichung lehrt uns folgendes: Wenn P auf der Achse in der Entfernung a von der brechenden Kugelfläche liegt, so kann man a' berechnen, und zwar ist a' ganz unabhängig von dem Einfallswinkel i, d. h. alle Strahlen, die unter kleiner Neigung von einem Punkte P ausgehen, schneiden sich nach der Brechung in ein und demselben Punkte P'. Zwei Punkte, die im Verhältnis von Objekt und Bild stehen, nennt man konjugierte Punkte.

Wir wollen jetzt die Punkte P und P' auf den Mittelpunkt M der Kugelfläche beziehen. Zu diesem Zwecke setzen wir

$$MP = s \quad \text{und} \quad MP' = s',$$

dann ist

$$a = s - r \quad \text{und} \quad a' = s' + r.$$

Setzen wir diese Werte in die Fundamentalgleichung (9) ein, so wird

$$\frac{n}{s - r} + \frac{n'}{s' + r} = \frac{n' - n}{r},$$

woraus sich als zweite Form der Fundamentalgleichung ergibt:

$$\frac{n'}{s} + \frac{n}{s'} = \frac{n' - n}{r}. \tag{10}$$

Wie wir sehen, besteht große Ähnlichkeit zwischen diesen beiden Formen (9) und (10). In der zweiten erscheinen nur die Brechungsexponenten vertauscht.

Wenn der Punkt P im Objektraume auf der Achse wandert, so wird auch die Lage des Bildpunktes P' sich ändern, und man kann mit Hilfe unserer Formel (9) die Entfernung a' des Bildpunktes P' vom Scheitel S der brechenden Fläche bestimmen, wenn die Entfernung a des Objektpunktes P vom Scheitel S gegeben ist, und zwar findet man:

$$a' = \frac{n'}{\frac{n' - n}{r} - \frac{n}{a}}. \tag{11}$$

§ 10. Brennpunkte und Brennweiten.

Wir wollen nun für ein paar bestimmte Werte von a die zugehörigen Werte von a' berechnen. Es sei zunächst

$$a = \infty ,$$

d. h. der leuchtende Objektpunkt P liege im Unendlichen, die von ihm ausgehenden Strahlen fallen also parallel auf die brechende Kugelfläche, dann wird

$$a' = \frac{n' r}{n' - n},$$

d. h. die parallel auffallenden Strahlen schneiden sich nach der Brechung in einem in der Entfernung a' vom Scheitel S liegenden Punkte P', den man den bildseitigen Brennpunkt nennt. Man bezeichnet diese Entfernung a' mit f', so daß also

$$\frac{n' r}{n' - n} = f' \tag{12}$$

ist, und nennt f' die bildseitige Brennweite.

Wenn wir nun den Punkt P der brechenden Fläche sich immer mehr nähern, also a immer kleiner werden lassen, so wird, wie unsere Formeln (9) bis (11) zeigen, a' immer größer werden, d. h. das Bild P' wird immer weiter von der brechenden Fläche wegrücken, bei einer bestimmten Lage von P wird das Bild P' sogar ins Unendliche fallen. Es ist nun von Interesse, zu bestimmen, für welche Lage des Punktes P, also für welchen Wert von a dieser Fall eintritt. Wenn der Bildpunkt P' im Unendlichen liegen soll, so muß

$$a' = \infty$$

sein, d. h. nach Gleichung (11) wird

$$\frac{n}{a} = \frac{n' - n}{r}$$

oder

$$a = \frac{n \cdot r}{n' - n}$$

sein. Man bezeichnet diesen speziellen Wert von a mit f und hat

$$\frac{n \cdot r}{n' - n} = f \tag{13}$$

d nennt f die objektseitige Brennweite.

Dividieren wir die beiden Gleichungen (12) und (13) für f und f' durcheinander, so erhalten wir

$$\frac{f}{f'} = \frac{n}{n'} .$$

Wir sehen also: Bei der Brechung durch eine Kugelfläche verhalten sich die beiden Brennweiten wie die Brechungsexponenten der beiden durch die Kugelfläche getrennten Medien.

Indem wir f und f' als gegebene Größen des Systemes annehmen, können wir die Gleichung (9) noch umformen, wenn wir sie durch $\frac{n' - n}{r}$ dividieren. Man erhält dann

$$\frac{n\,r}{n' - n} \cdot \frac{1}{a} + \frac{n'r}{n' - n} \cdot \frac{1}{a'} = 1$$

oder

$$\frac{f}{a} + \frac{f'}{a'} = 1 . \tag{14}$$

Nach dieser Formel ist für die Lage jedes Objektpunktes die Lage des Bildpunktes, und umgekehrt für jede Lage des Bildpunktes die Lage des Objektpunktes durch die beiden Brennweiten vollständig bestimmt.

§ 11. Abbildung von Objekten.

Während wir uns bisher nur mit der Abbildung leuchtender Punkte beschäftigt haben, wollen wir nunmehr dazu übergehen, die Abbildung kleiner leuchtender Gegenstände zu betrachten.

Zwischen den beiden Medien mit den Brechungsexponenten n und n' liege wieder die brechende Kugelfläche mit dem Mittel-

Fig. 6.

punkte M (Fig. 6). Auf der optischen Achse SM resp. auf deren Verlängerung befinde sich in der Entfernung $PM = s$ vom Mittelpunkte M ein sehr kleiner leuchtender Gegenstand PQ, etwa von der Form eines Pfeiles, welcher normal steht auf der optischen Achse.

Der Punkt P wird dann in der Entfernung s' vom Mittelpunkte M einen Bildpunkt P' erzeugen, für welchen die Gleichung (10)

$$\frac{n'}{s} + \frac{n}{s'} = \frac{n' - n}{r}$$

gilt. Ganz analog bilden wir Q ab, indem wir eine sogenannte sekundäre optische Achse QM ziehen. Setzen wir nun

$$QM = S,$$

so muß das Bild Q' von Q sich in der Entfernung S' von M auf der Verlängerung der sekundären optischen Achse QM befinden, wo S' zu berechnen ist aus der Gleichung

$$\frac{n'}{S} + \frac{n}{S'} = \frac{n' - n}{r}. \tag{15}$$

Unter der Voraussetzung, daß Q senkrecht über P liegt, muß dann auch Q' senkrecht über P' liegen, was wir jetzt beweisen wollen.

Beweis: Wir bezeichnen den Winkel, welchen die optische Achse PM mit der sekundären optischen Achse QM bildet, mit ϑ; dann ist (Fig. 6)

$$S = \frac{s}{\cos\vartheta}.$$

Da wir nun angenommen haben, daß der Gegenstand PQ sehr klein ist, und wir uns im paraxialen Gebiete befinden, so kann man setzen:

$$\cos\vartheta = 1$$

und somit

$$S = s.$$

Setzen wir diesen Wert von S in Gleichung (15) ein, so ergibt sich aus dieser Gleichung in Verbindung mit Gleichung (10) auch

$$S' = s',$$

d. h.

$$MP' = MQ',$$

d. h.: Wenn ich P' und Q' verbinde, so kann ich $P'Q'$ auffassen als den Bogen eines Kreises, der mit dem Radius $MP' = MQ'$ um M geschlagen ist. Da wir uns nun aber im paraxialen Gebiete befinden, d. h. den Winkel $P'MQ'$ als außerordentlich klein betrachten können, so können wir den Kreisbogen mit seiner Tangente vertauschen. Die Tangente steht aber immer senkrecht auf ihrem Radius, und man hat demnach

$$P'Q' \perp MP'.$$

Wir haben also das Resultat: „ein kleines achsensenkrechtes Objekt wird mittels paraxialer Strahlen wieder als kleines achsensenkrechtes Bild abgebildet.“

Setzen wir nun das Objekt

$$PQ = y \quad \text{und das Bild} \quad P'Q' = y',$$

so folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke MPQ und $MP'Q'$

$$\frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}.$$

Das Verhältnis $\frac{y'}{y}$ nennt man die Vergrößerung der Kugelfläche und bezeichnet es mit β, so daß also

$$\frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} = \beta \tag{16}$$

ist.

§ 12. Ableitung des Helmholtz-Lagrangeschen Satzes.

Wir nehmen wieder (Fig. 7) eine brechende Kugelfläche als Grenze zweier Medien mit den Brechungsexponenten n und n' an. Der Mittelpunkt der Kugelfläche sei M, die optische Achse MS, der Scheitel S. $PQ = y$ stelle wieder ein sehr kleines leuchtendes Objekt dar. Es ist nun klar, daß, wenn wir von Q aus einen Strahl QM

Fig. 7.

durch den Mittelpunkt M der Kugel ziehen, dieser nicht abgelenkt wird, da er ja senkrecht auf die Kugel auffällt. Ferner wissen wir, daß sämtliche innerhalb des paraxialen Gebietes von Q ausgehenden Strahlen nach der Brechung durch einen Punkt Q' gehen. Wir wählen nun einen von diesen Strahlen aus, und zwar wollen wir denjenigen Strahl nehmen, der gerade durch den Scheitel S der Kugelfläche geht. Dieser Strahl fällt nun nicht mehr senkrecht auf die Kugelfläche auf, er wird also gebrochen werden. Nach der Brechung wird er den Strahl QM im Punkte Q' schneiden.

Da für den Scheitel S die optische Achse zugleich Einfallslot ist, so ist der Winkel PSQ der Einfallswinkel des Strahles QS, der Winkel $P'SQ'$ der zugehörige Brechungswinkel. Wenn wir nun setzen

$$\sphericalangle PSQ = i \quad \text{und} \quad \sphericalangle P'SQ' = i',$$

so besteht die Gleichung

$$n \sin i = n' \sin i',$$

und da wir ein sehr kleines Objekt angenommen haben und uns im paraxialen Gebiete befinden, so ist auch

$$n i = n' i' \quad \text{oder} \quad \frac{i}{i'} = \frac{n'}{n}.$$

Ferner ist, wie sich aus der Figur 7 ergibt,

$$\operatorname{tg} i = i = \frac{y}{a},$$

$$\operatorname{tg} i' = i' = \frac{y'}{a'}.$$

Dividieren wir nun diese beiden Gleichungen durcheinander, so erhalten wir in Verbindung mit der ersten Gleichung

$$\frac{i}{i'} = \frac{y}{y'} \cdot \frac{a'}{a} = \frac{n'}{n},$$

und daraus ergibt sich die Vergrößerung

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{n a'}{n' a}, \tag{17}$$

wo aber die Größen nicht wie in Gleichung (16) auf den Mittelpunkt der Kugelfläche, sondern auf ihren Scheitel bezogen sind. Die letzte Gleichung kann man auch schreiben

$$\frac{n y}{a} = \frac{n' y'}{a'}. \tag{18}$$

Lassen wir von P innerhalb des paraxialen Gebietes einen ganz beliebigen Strahl ausgehen, der die Kugelfläche in S' treffen möge, so wird dieser Strahl gebrochen werden und die Achse PM in P' schneiden. Die Winkel, welche dieser Strahl vor und nach der Brechung mit der optischen Achse bildet, seien

$$\sphericalangle S'PS = u \quad \text{und} \quad \sphericalangle S'P'S = u',$$

dann ist

$$u = \frac{\widehat{SS'}}{a} \quad \text{und} \quad u' = \frac{\widehat{SS'}}{a'}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{u}{u'} = \frac{a}{a'}$$

und unter Berücksichtigung von (18)

$$n \cdot u \cdot y = n' \cdot u' \cdot y' \,. \tag{19}$$

Diese Gleichung stellt einen der merkwürdigsten Sätze der geometrischen Optik dar. Er besagt: Das Produkt von Brechungsexponent, Neigung eines Strahles und Größe des Bildes vor der Brechung ist gleich demselben Produkte nach der Brechung.

Selbstverständlich können wir diesen Satz auch für weitere Brechungen anwenden. Nehmen wir an, wir haben eine zweite brechende Fläche, und es verwandeln sich die Größen n', u', y' durch die erneute Brechung in n'', u'', y'', so ist

$$n' u' y' = n'' u'' y'' \,,$$

ebenso wird für eine dritte brechende Fläche

$$n'' u'' y'' = n''' u''' y'''$$

usw. Setzen wir λ brechende Flächen als vorhanden voraus, so erhalten wir λ derartige Gleichungen. Multiplizieren wir diese λ Gleichungen miteinander, so erhalten wir

$$n \cdot u \cdot y = n^{(\lambda)} \cdot u^{(\lambda)} \cdot y^{(\lambda)} \,. \tag{20}$$

Hat man also beliebig viele brechende Kugelflächen auf einer Achse und befindet sich im ersten Medium mit dem Brechungsexponenten n ein Objekt y und geht ein Strahl unter dem Einfallswinkel u von dem Fußpunkte des Objektes aus durch das System, gelangt in ein letztes Medium mit dem Brechungsexponenten $n^{(\lambda)}$ und schneidet dort die Achse unter einem Winkel $u^{(\lambda)}$, so besteht, wenn $y^{(\lambda)}$ das Bild ist, die obige Beziehung (20).

Dies ist der Helmholtz-Lagrangesche Satz.

§ 13. Formeln für mehrere Flächen.

Aufgabe: Durch ein System zentrierter Kugelflächen einen Strahl im paraxialen Gebiete durchzurechnen.

Auflösung: Sei eine beliebige Anzahl von brechenden Kugelflächen gegeben. (Der Übersichtlichkeit wegen wollen wir uns hier auf drei Flächen beschränken.) Die Brechungsexponenten der einzelnen Medien seien der Reihe nach n_1, n_2, n_3, n_4. Wollen wir die

bisher gebrauchte Bezeichnungsweise konsequent weiterführen, so ist der Brechungsexponent

vor der ersten Fläche n_1, hinter der ersten Fläche n_1',
„ „ zweiten „ n_2, „ „ zweiten „ n_2',
„ „ dritten „ n_3, „ „ dritten „ n_3'.

Man sieht also, daß es sich in einem solchen System bei konsequenter Bezeichnung nicht vermeiden läßt, dem Brechungsexponenten desselben Mediums zwei verschiedene Bezeichnungen zu geben. Es ist somit

$$(21)\qquad \begin{cases} n_1' = n_2\,, \\ n_2' = n_3\,, \\ n_3' = n_4\,. \end{cases}$$

Ein Objekt $P_1 Q_1 = y_1$ im ersten Medium mit dem Brechungsexponenten n_1 erzeuge nun (Fig. 8) nach der ersten Brechung ein Bild y_1' mit dem Fußpunkte P_2. Dieses letztere ist nun für die Brechung an der nächstfolgenden Fläche als Objekt aufzufassen und

Fig. 8.

demnach konsequenterweise mit y_2 zu bezeichnen. Es erzeugt nach der darauf folgenden Brechung an der nächsten Fläche das Bild y_2' usw. Wir sehen, daß wir bei konsequenter Bezeichnung ein und dasselbe Bild ebenfalls doppelt bezeichnen müssen. Es ist also:

$$(22)\qquad \begin{cases} y_1' = y_2\,, \\ y_2' = y_3\,, \\ y_3' = y_4\,. \end{cases}$$

Die Entfernungen der einzelnen Flächen voneinander wollen wir mit d_1, d_2 usw. bezeichnen. Geht nun ein Strahl durch ein solches aus drei brechenden Kugelflächen bestehendes System, so erhalten wir unter Anwendung der Gleichung (9)

$$(23)\qquad \begin{cases} \dfrac{n_1}{a_1} + \dfrac{n_1'}{a_1'} = \dfrac{n_1' - n_1}{r_1} & \\ & a_1' + a_2 = d_1\,, \\ \dfrac{n_2}{a_2} + \dfrac{n_2'}{a_2'} = \dfrac{n_2' - n_2}{r_2} & \\ & a_2' + a_3 = d_2\,. \\ \dfrac{n_3}{a_3} + \dfrac{n_3'}{a_3'} = \dfrac{n_3' - n_3}{r_3} & \end{cases}$$

Wenn wir nun bedenken, daß die Größen $n_1 \ldots n_4$, d_1 und d_2 sowie a_1 im allgemeinen gegeben sind, so haben wir in diesen Gleichungen ein System von Rekursionsformeln, aus denen die Entfernung des letzten entstehenden Bildes von der letzten brechenden Fläche nach beliebig vielen Brechungen berechnet werden kann. Um nun auch die Größe der Bilder nach mehreren Brechungen angeben zu können, wenden wir Gleichung (17) für die Brechung an den aufeinanderfolgenden Flächen an und erhalten in konsequenter Beibehaltung der von uns gewählten Bezeichnungen:

$$(24)\quad \begin{cases} \text{für die erste Fläche} & \dfrac{y_1'}{y_1} = \dfrac{n_1\, a_1'}{n_1'\, a_1}, \\ \text{„ „ zweite „} & \dfrac{y_2'}{y_2} = \dfrac{n_2\, a_2'}{n_2'\, a_2}, \\ \text{„ „ dritte „} & \dfrac{y_3'}{y_3} = \dfrac{n_3\, a_3'}{n_3'\, a_3}. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen kann man, wenn die Größe des Objektes y_1 bekannt ist, die Größe des letzten Bildes finden. Diese Rechnung kann man noch vereinfachen, wenn man die Gleichungen (24) miteinander multipliziert und die Beziehungen (22) berücksichtigt. Es ergibt sich

$$(25)\qquad \frac{y_3'}{y_1} = \frac{n_1}{n_3'} \cdot \frac{a_1'\, a_2'\, a_3'}{a_1\, a_2\, a_3}.$$

Analog würde man Lage und Größe des Bildes nach λ Brechungen finden. Das Bildungsgesetz der Formeln (23) und (25) ist unmittelbar einleuchtend auch für beliebig viele Flächen. Der Anschaulichkeit halber wollen wir unsere weiteren Betrachtungen an einem Systeme von drei Flächen weiterführen. Wir bemerken jedoch hier schon, daß bei photographischen Objektiven das erste und letzte Medium immer denselben Brechungsexponenten haben, den wir, da hier nur Luft in Frage kommt, gleich Eins setzen können. Nur in ganz vereinzelten Fällen treten Ausnahmen ein, wie z. B. bei der Mikrophotographie mittels einer Ölimmersion, bei der Photographie des Augenhintergrundes oder von Objekten in der menschlichen oder tierischen Blase mittels des Zystoskopes.

Bemerkt wird noch, daß die Radien der brechenden Flächen positiv oder negativ in Rechnung gezogen werden, je nachdem sie dem ankommenden Lichte die konvexe oder konkave Seite zuwenden.

§ 14. Hauptpunkte.

Eine einfache Überlegung zeigt, daß uns unsere Formeln auch Antwort geben auf die Frage: Wo liegt ein Objekt und wo das durch ein System von drei brechenden Kugelflächen erzeugte zugehörige Bild, wenn eine vorgeschriebene Vergrößerung eintreten soll.

Wir haben in diesem Falle die sechs Unbekannten

$$\begin{matrix} a_1\,, & a_1'\,, \\ a_2\,, & a_2'\,, \\ a_3\,, & a_3'\,, \end{matrix}$$

zwischen denen die fünf Gleichungen (23) bestehen. Wenn nun das Bild eine vorgeschriebene Vergrößerung β haben soll, so muß also sein

$$\frac{y_3'}{y_1} = \beta\,.$$

Setzen wir diesen Wert ein in Gleichung (25), so erhalten wir in

$$\frac{n_1}{n_3'} \cdot \frac{a_1' a_2' a_3'}{a_1\, a_2\, a_3} = \beta \tag{26}$$

eine sechste Gleichung zwischen unseren sechs Unbekannten. Wir haben also jetzt sechs Gleichungen mit sechs Unbekannten, wodurch die letzteren bestimmt sind.

Besonders interessant ist nun der Fall, wo das Bild genau so groß ist als das Objekt. Bedingung dafür ist

$$\beta = \frac{y_3'}{y_1} = \pm 1\,. \tag{27}$$

Aus dieser Gleichung in Verbindung mit Gleichung (25) und den Gleichungen (23) können wir für jedes gegebene System berechnen, wo das Objekt und das gleichgroße Bild desselben liegen muß. Das positive Zeichen in Gleichung (27) drückt aus, wie ein Blick auf Figur 6 lehrt, daß das Bild umgekehrt, das negative Zeichen, daß das Bild gleichgerichtet wie das Objekt gelegen ist. Man nennt nun nach Gauß die beiden Punkte, in welchen das Objekt und das zugehörige gleichgroße und gleichgerichtete Bild liegen, die beiden Hauptpunkte des Systemes. Zur Bestimmung der Hauptpunkte einer einzigen brechenden Fläche dienen die Gleichungen

$$\frac{n}{a} + \frac{n'}{a'} = \frac{n' - n}{r}$$

und

$$\frac{n a'}{n' a} = -1 ,$$

aus denen leicht folgt, daß in diesem Falle die Hauptpunkte in dem Scheitel der Fläche zusammenfallen.

§ 15. Zusammenfassung der im paraxialen Gebiete herrschenden Eigenschaften der Strahlen.

Für im paraxialen Gebiete verlaufende Strahlen gilt also folgendes:

1. Alle von einem Punkte des Objektraumes ausgehenden Strahlen vereinigen sich nach der Brechung in ein und demselben Punkte des Bildraumes. (S. 15.)
2. Ein achsensenkrechtes Bild im Objektraume erzeugt nach beliebig vielen Brechungen wieder ein achsensenkrechtes Bild im Bildraume. (S. 19.)
3. Parallel einfallende Strahlen schneiden sich in einem in endlicher Entfernung auf der Achse gelegenen Punkte (dem hinteren Brennpunkte), und alle von der Bildseite aus parallel einfallenden Strahlen würden sich im vorderen Brennpunkte schneiden. (S. 16.)
4. In jedem System gibt es ein paar Punkte H und H' von der Eigenschaft, daß ein Objekt im Punkte H ein ebenso großes, gleichgerichtetes Bild im Punkte H' erzeugt. (S. 24.)
5. Das Produkt aus Brechungsexponent, Bildgröße und Achsenwinkel eines Strahles ist eine Unveränderliche. [Helmholtz-Lagrangescher Satz.] (S. 21.)

§ 16. Konstruktion des Bildes mittels der Brennpunkte und Hauptpunkte.

Es sei (Fig. 9) $L L_1 L' L_1'$ ein aus zentrierten Kugelflächen gebildetes System. Links davon sei der Objektraum mit dem Brechungsexponenten n, rechts der Bildraum mit dem Brechungsexponenten n'. Auf der optischen Achse seien F der vordere, F' der hintere Brennpunkt, H und H' die beiden Hauptpunkte. Durch H und H' sind Ebenen senkrecht zur optischen Achse gelegt, die man Hauptebenen nennt.

$y = PQ$ sei irgend ein auf der optischen Achse senkrechtes Objekt im Objektraume. Um nun das Bild Q' von Q zu konstruieren, wählen wir von den sämtlichen von Q ausgehenden Strahlen zwei

aus, die wir leicht in den Bildraum hinein verfolgen können, und deren Schnittpunkt der gesuchte Bildpunkt Q' sein muß.

1. Wir ziehen einen zur optischen Achse parallelen Strahl, der die erste Hauptebene in A schneidet. Da dieser Strahl durch einen Punkt A der ersten Hauptebene geht, so muß er nach der Brechung durch einen Punkt A' der zweiten Hauptebene gehen, so daß $AH = A'H'$ ist, da ja in den beiden Hauptebenen Objekt und Bild

Fig. 9.

gleichgroß und gleichgerichtet sind. Da ferner der Strahl QA im Objektraume parallel zur optischen Achse lief, so muß er im Bildraume durch den hinteren Brennpunkt F' gehen. Eine Gerade durch A' und F' repräsentiert also den Strahl nach der Brechung, muß also durch den gesuchten Punkt Q' gehen.

2. Als zweiten von Q ausgehenden Strahl ziehen wir QF, der verlängert die erste Hauptebene in B trifft. Im Bildraume muß dieser Strahl durch den Punkt B' der zweiten Hauptebene gehen, so daß $HB = H'B'$ ist. Da dieser Strahl ferner im Objektraume durch den vorderen Brennpunkt F geht, so muß er im Bildraume der optischen Achse parallel verlaufen. Eine Parallele zur optischen Achse durch B' schneidet also die Verlängerung von $A'F'$ in dem gesuchten Bildpunkte Q'. Da wir nun wissen, daß ein zur optischen Achse senkrechtes Objekt wieder ein zur optischen Achse senkrechtes Bild nach der Brechung liefert, so ist das von Q' auf die optische Achse gefällte Lot $Q'P' = y'$ das gesuchte Bild von PQ.

Auf analoge Weise kann man von jedem Objekte das Bild konstruieren, indem man zu jedem Objektpunkte den zugehörigen Bildpunkt sucht.

§ 17. Beziehungen zwischen konjugierten Schnittweiten.

In der Figur 9 führen wir noch folgende Bezeichnungen ein:

$$PQ = y = AH = A'H' \quad FH = f \quad PF = x \quad PH = a,$$
$$P'Q' = y' = B'H' = BH \quad F'H' = f' \quad P'F' = x' \quad P'H' = a'.$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke PQF und BHF sowie $P'Q'F'$ und $A'H'F'$ folgt

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{f}{x} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{y'}{y} = \frac{x'}{f'}, \tag{28}$$

und aus diesen beiden Formeln für die Vergrößerung folgt die **sehr wichtige Gleichung**

$$x x' = f f'. \tag{29}$$

Nach unseren Bezeichnungen ist

$$x = a - f \quad \text{und} \quad x' = a' - f'.$$

Setzen wir dies in unsere Gleichung ein, so wird

$$(a - f)(a' - f') = f f',$$
$$a a' - a' f - a f' = 0$$

oder

$$\frac{f}{a} + \frac{f'}{a'} = 1. \tag{30}$$

In dieser Gleichung sind die Schnittweiten a und a' auf die Hauptpunkte H und H' bezogen; sie stimmt der Form nach mit (14) genau überein, was seinen Grund darin hat, daß der Scheitel einer brechenden Fläche die vereinigten Hauptpunkte enthält. Durch diese Gleichung wird auch für die Größen f und f' die Bezeichnung „**Brennweiten**" gerechtfertigt.

§ 18. Beziehung zwischen den beiden Brennweiten.

Wir haben oben (S. 17) gesehen, daß für eine einzige brechende Kugelfläche die Beziehung

$$\frac{f}{f'} = \frac{n}{n'}$$

gilt. Wir wollen jetzt beweisen, daß diese Beziehung auch für ein beliebiges zentriertes System besteht.

Verbindet man P mit A und A' mit P' (Fig. 9), so stellt AP und $A'P'$ denselben Strahl vor und nach der Brechung dar. Dieser Strahl kann als ein ganz beliebiger aufgefaßt werden, da ja die Größe y ganz beliebig angenommen war. Es werde nach

$$\sphericalangle APH = u \quad \text{und} \quad \sphericalangle H'P'A' = u'$$

gesetzt, dann ist nach dem Helmholtz-Lagrangeschen Satze

$$n \cdot u \cdot y = n' \cdot u' \cdot y',$$

und aus der Figur findet man

$$\operatorname{tg} u = u = \frac{y}{a} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} u' = u' = \frac{y}{a'}.$$

Setzt man diese beiden Werte in die Helmholtz-Lagrangesche Gleichung ein, so erhält man, wenn man gleich durch y dividiert,

$$\frac{n y}{a} = \frac{n' y'}{a'}.$$

Daraus ergibt sich zunächst ein neuer Wert für die Vergrößerung, nämlich

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{n a'}{n' a}. \tag{31}$$

Wir bemerken, daß wir auch diesen Wert für eine einzige brechende Kugelfläche bereits gefunden haben (S. 20). Die letzte Gleichung können wir auch schreiben

$$\beta = \frac{n(x' + f')}{n'(x + f)}. \tag{31a}$$

Erweitern wir mit f, so wird

$$\beta = \frac{n(x'f + ff')}{n'f(x + f)},$$

oder, da nach S. 27 $ff' = xx'$ ist,

$$\beta = \frac{n(x'f + xx')}{n'f(x + f)} = \frac{n x'(x + f)}{n'f(x + f)} = \frac{n x'}{n' f}.$$

Setzen wir hier für β seinen Wert $\beta = \frac{x'}{f'}$ gemäß Gleichung (28) ein, so erhalten wir

$$\frac{f}{f'} = \frac{n}{n'}, \tag{32}$$

was zu beweisen war. Die Größen f und f' verhalten sich also wie die Brechungsexponenten des ersten und letzten Mediums.

§ 19. Konvergenzverhältnis.

Wir nennen das Verhältnis der beiden Strahlenneigungen in zwei beliebigen konjugierten Punkten P' und P

$$\gamma = \frac{u'}{u} = \frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u}$$

das Konvergenzverhältnis. — Aus dem Helmholtz-Lagrangeschen Satze folgt in Verbindung mit der Gleichung

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{x'}{f'} = \frac{f}{x}$$

$$\gamma = \frac{n}{n'} \cdot \frac{1}{\beta}, \tag{33}$$

und aus der vorletzten Gleichung in Verbindung mit der Gleichung

$$\frac{f}{f'} = \frac{n}{n'}$$

ergibt sich weiter:

$$\gamma = \frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u} = \frac{u'}{u} = \frac{x}{f'} = \frac{f}{x'}. \tag{34}$$

§ 20. Die Brennweiten für ein System.

Als Brennweiten f und f' des Systemes haben wir bisher die Entfernung der Brennpunkte von den Hauptpunkten angesehen. Wir geben jetzt noch folgende neue Definitionen:

I. Die erste Brennweite f ist das Verhältnis der Höhe, in welcher ein Strahl im Bildraume dessen Brennebene schneidet, zur trigonometrischen Tangente des Neigungswinkels, den sein konjugierter Strahl im Objektraume mit der optischen Achse bildet.

II. Die zweite Brennweite f' ist das Verhältnis der Höhe, in welcher ein Strahl im Objektraume dessen Brennebene schneidet, zur trigonometrischen Tangente des Neigungswinkels, den sein konjugierter Strahl im Bildraume mit der optischen Achse bildet.

Wenn wir also in F und F' (Fig. 9) senkrechte Ebenen zur optischen Achse (Fokalebenen) gelegt denken, den Schnittpunkt des Strahles PA mit der im Objektraume liegenden Fokalebene mit C und den Schnittpunkt von $A'P'$ mit der im Bildraume liegenden Fokalebene mit C' bezeichnen und dann

$$FC = h \quad \text{und} \quad F'C' = h'$$

setzen, so besagen die neuen Definitionen, daß

$$f = \frac{h'}{\operatorname{tg} u} \quad \text{und} \quad f' = \frac{h}{\operatorname{tg} u'} \tag{35}$$

ist, wo wir, da wir uns im paraxialen Gebiete befinden, nach Belieben $\operatorname{tg} u$ durch u ersetzen können. Zum Beweise, daß die durch Gleichung (35) definierten Größen f und f' tatsächlich mit den früher als Brennweiten bezeichneten Größen übereinstimmen, bilden wir aus den Dreiecken AHP und CFP (Fig. 9)

$$y : h = x + f : x \,,$$

und weiter ist

$$\operatorname{tg} u' = \frac{y}{x' + f'} \,;$$

eliminieren wir y aus diesen beiden Gleichungen, so ergibt sich:

$$\frac{x' + f'}{x + f} \cdot \operatorname{tg} u' = \frac{h}{x} \,.$$

Nun ist weiter zufolge Gleichung (31a)

$$\beta = \frac{n\,(x' + f')}{n'\,(x + f)} \,,$$

und man erhält:

$$\frac{h}{\operatorname{tg} u'} = \frac{n'}{n} \cdot \beta\, x \,.$$

Unter Berücksichtigung der Gleichungen $\frac{f}{f'} = \frac{n}{n'}$, $\beta = \frac{x'}{f'}$ und $x\,x' = f\,f'$ wird diese Gleichung:

$$f' = \frac{h}{\operatorname{tg} u'} = \frac{h}{u'} \,. \tag{36}$$

Ganz analog wird bewiesen, daß

$$f = \frac{h'}{\operatorname{tg} u} = \frac{h'}{u} \tag{36a}$$

ist.

§ 21. Die Knotenpunkte.

Setzen wir das Konvergenzverhältnis gleich -1, so wird $\frac{u'}{u} = -1$ oder $u' = -u$. Diejenigen konjugierten Punkte, für welche dies statt hat, nennt man Knotenpunkte.

In diesem Falle verlaufen also der eintretende Strahl und der austretende Strahl parallel. Es ergibt sich dann aus (34)

$$\frac{x}{f'} = -1 \quad \text{und} \quad \frac{f}{x'} = -1 \,,$$

d. h.

$$x = -f' \quad \text{und} \quad x' = -f \,;$$

damit ist die Lage der Knotenpunkte bestimmt. Der erste Knotenpunkt liegt also vom vorderen Brennpunkte F um die Strecke f' nach rechts und der zweite Knotenpunkt vom hinteren Brennpunkte F' um die Strecke f nach links entfernt (vgl. in Fig. 10 die Punkte K und K').

Aus dieser Eigenschaft der Knotenpunkte K und K', daß ein in K eintretender Strahl durch K' parallel austritt, ergibt sich eine neue Konstruktion des Bildes, bei der man f und f' gar nicht mehr zu kennen braucht. Diese Konstruktion gewährt eine große Erleichterung in allen den Fällen, wo die Brechungsexponenten für Objektraum und Bildraum verschieden sind, wie dies z. B. beim menschlichen Auge der Fall ist (vgl. S. 23). Für die photographische Optik dagegen hat sie geringe Bedeutung, weil wir hier zu der Annahme berechtigt sind, daß sich das Objektiv in Luft befindet, daß also der Brechungsexponent des Objektraumes und des Bildraumes derselbe ist.

Fig. 10.

§ 22. Zusammenstellung der Fundamentalformeln.

Vergrößerung:

I. $$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{f}{x} = \frac{x'}{f'}\,.$$

Konvergenzverhältnis:

II. $$\gamma = \frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u} = \frac{x}{f'} = \frac{f}{x'}\,.$$

Brennpunktsabstände konjugierter Vereinigungspunkte:

III. $$x x' = f f'\,.$$

Hauptpunktsabstände konjugierter Vereinigungspunkte:

IV. $$\frac{f}{a} + \frac{f'}{a'} = 1\,.$$

Definition der Brennweiten:

V. $$f = \frac{h'}{\operatorname{tg} u}\,, \quad f' = \frac{h}{\operatorname{tg} u'}\,.$$

Verhältnis der Brennweiten:

VI. $$\frac{f}{f'} = \frac{n}{n'}\,.$$

In der photographischen Optik nehmen wir nun im allgemeinen, wie schon oben erwähnt, an, daß sich das Objektiv in Luft befindet, daß also

$$n = n'$$

ist. Dann gehen diese Fundamentalformeln über in:

$$\text{VII.} \quad \left\{ \begin{aligned} &\beta = \frac{f}{x} = \frac{x'}{f}\,, \\ &\gamma = \frac{x}{f} = \frac{f}{x'}\,, \\ &x x' = f^2\,, \\ &\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f}\,, \\ &f = \frac{h}{\operatorname{tg} u'} = \frac{h'}{\operatorname{tg} u}\,, \\ &f = f'\,. \end{aligned} \right.$$

§ 23. Konstruktion des Bildes für ein photographisches Objektiv.

In jedem beiderseits von Luft umgebenen photographischen Objektiv liegen also die Hauptpunkte gleichweit entfernt von den beiden Brennpunkten, und ferner fallen in jedem photographischen Objektiv die Knotenpunkte mit den Hauptpunkten zusammen. Man spricht dann von einer „Knotenpunktseigenschaft der Hauptpunkte“, die darin besteht, daß ein im Objektraume durch den ersten Hauptpunkt gehender Strahl im Bildraume sich selbst parallel durch den zweiten Hauptpunkt geht.

Fig. 11.

Aus dieser Eigenschaft ergibt sich eine sehr einfache Konstruktion des Bildes, wenn die Hauptpunkte und der hintere Brennpunkt gegeben sind.

Man zieht nämlich durch den Objektpunkt Q (Fig. 11) die Achsenparallele QA bis zur ersten Hauptebene und außerdem die Gerade QH. Macht man dann $A'H' = AH$ und zieht durch A' und F' eine Gerade, so schneidet diese eine durch H' gezogene und zu QH parallele Gerade im Bildpunkte Q'.

§ 24. Bestimmung der Brennweite durch Messung.

Die Brennweite der in den Werkstätten fertig gestellten Objektive wird schon der Kontrolle wegen durch direkte Messung bestimmt. Man verfährt dabei folgendermaßen:

Man wählt ein Objekt, z. B. eine Meßlatte, in so großer Entfernung, daß man dieselbe als unendlich betrachten kann; dann fallen von dem äußersten Punkte des Objektes parallele Strahlen auf das Objektiv, die sich nach der Brechung in einem bestimmten Punkte Q' der Mattscheibe schneiden werden (Fig. 12). Da alle Strahlen parallel einfallen, also denselben Winkel u mit der optischen Achse bilden, so haben alle dieselbe bildseitige Schnitthöhe $h' = Q'F'$ in der Fokalebene, die auf der Mattscheibe mittels eines Maßstabes leicht festzustellen ist. Ebenso ist der Winkel u mittels eines Theodoliten leicht zu messen. Damit ist nach der Gleichung (35)

Fig. 12.

$$f = \frac{h'}{\operatorname{tg} u}$$

die Brennweite bestimmt.

Wählt man z. B. ein für allemal $u = 5^0$, so ist $\operatorname{tg} u = u = 0{,}087$ und demnach $f = \frac{h'}{0{,}087}$. Man hat also nur die beobachtete Höhe durch 0,087 zu dividieren, um f zu erhalten.

§ 25. Bestimmung von F und F' sowie von f und f' aus den optischen Konstanten eines Systemes.

Von einem optischen Systeme seien gegeben

die Radien	$r_1, r_2, r_3 \ldots,$
die Brechungsexponenten	$n_1, n_2, n_3 \ldots,$
die Dicken	$d_1, d_2, d_3 \ldots.$

Man nennt diese Größen schlechtweg die **optischen Konstanten des Systemes.**

Wir haben gesehen, daß von der Lage der beiden Brennpunkte F und F' und von den beiden Brennweiten f und f' alle weiteren Beziehungen abhängen. Trägt man von den Brennpunkten F und F' auf der optischen Achse die Brennweiten f und f' ab, so gelangt man zu den Hauptpunkten H_1 und H_2; trägt man dagegen von diesen Punkten die Brennweiten f' und f ab, so findet man die Knotenpunkte. Es bleibt noch übrig, aus den Konstanten eines Systemes die Lage von F und F' sowie die Größe von f und f' wirklich zu berechnen. Wir knüpfen der Anschaulichkeit wegen die weiteren Betrachtungen an ein System von drei brechenden Flächen an.

Für ein System von drei brechenden Flächen gelten, wie wir früher gesehen haben (vgl. S. 22 u. 23), folgende Beziehungen:

$$(37)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{n_1}{a_1}+\frac{n_1'}{a_1'}=\frac{n_1'-n_1}{r_1} \\ &\qquad\qquad\qquad a_1'+a_2=d_1\,, \\ &\frac{n_2}{a_2}+\frac{n_2'}{a_2'}=\frac{n_2'-n_2}{r_2} \\ &\qquad\qquad\qquad a_2'+a_3=d_2\,. \\ &\frac{n_3}{a_3}+\frac{n_3'}{a_3'}=\frac{n_3'-n_3}{r_3} \end{aligned}\right.$$

$$(38)\qquad \beta=\frac{y_3'}{y_1}=\frac{n_1}{n_3'}\cdot\frac{a_1'\,a_2'\,a_3'}{a_1\,a_2\,a_3}\,.$$

Die Bestimmung der Lage von F' geschieht, indem man in das Gleichungssystem (37) $a_1=\infty$ setzt und durch sukzessive Substitution den Wert von a_3' ermittelt. Dieser Wert von a_3' ist die sogenannte **bildseitige fokale Schnittweite**, d. h. die Entfernung des Punktes F' von der letzten brechenden Fläche, und ist nach rechts oder links zu rechnen, je nachdem a_3' positiv oder negativ sich ergibt.

Die Bestimmung der Lage von F geschieht ganz analog aus dem Gleichungssystem (37), indem man darin $a_3'=\infty$ setzt und den Wert von a_1 ermittelt.

Die Gleichung (38) können wir auch schreiben:

$$(39)\qquad \frac{y_3'\,a_1}{y_1}=\frac{n_1}{n_3'}\cdot\frac{a_1'\,a_2'\,a_3'}{a_2\,a_3}\,.$$

Wir betrachten einen Strahl (Fig. 13), der von der Spitze Q eines Objektes $y_1=PQ$ kommt und den Scheitel S der ersten brechenden Fläche trifft. Der Winkel, welchen er mit der optischen Achse bildet, sei u, dann ist, wenn a_1 die Entfernung des Fußpunktes P

des Objektes vom Scheitel S ist, und wir die Tangente mit dem Bogen vertauschen,

$$u = \frac{y_1}{a_1};$$

setzen wir dies ein in Gleichung (39), so erhalten wir

$$\frac{y_3'}{u} = \frac{n_1}{n_3'} \cdot \frac{a_1' a_2' a_3'}{a_2 a_3}. \tag{40}$$

Der Strahl QS wird dann das System durchdringen und nach der Brechung durch die Spitze Q' des zugehörigen Bildes y_3' gehen.

Fig. 13.

Lassen wir jetzt das Objekt ins Unendliche rücken, so muß daß Bild y_3' in die Fokalebene treten; denn in diese fällt immer das Bild eines sich im Unendlichen befindenden Objektes, und die fokale Schnitthöhe des Strahles wird:

$$h' = y_3'.$$

Demnach liefert Gleichung (40)

$$\frac{h'}{u} = \frac{n_1}{n_3'} \cdot \frac{a_1' a_2' a_3'}{a_2 a_3}. \tag{41}$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist aber nach Gleichung (36a) nichts anderes als die Brennweite selbst, also haben wir

$$f = \frac{n_1}{n_3'} \cdot \frac{a_1' a_2' a_3'}{a_2 a_3}. \tag{42}$$

Da wir wieder angenommen hatten, daß das Objekt im Unendlichen sich befindet, so ist $a_1 = \infty$ in das Gleichungssystem (37) einzusetzen, und es sind dann die Größen a_2, a_3, a_1', a_2', a_3' aus demselben zu berechnen. Somit ist f durch die Konstanten des Systemes bestimmt.

Die Bestimmung von f' geschieht am einfachsten aus der Gleichung $\frac{f}{f'} = \frac{n}{n'}$, falls nicht $n = n'$ sein sollte.

Sind auf diese Weise die vier Grundfaktoren der Abbildung d. h. die Lage der Punkte F und F' und die Größe der Brennweiten eines Systemes bestimmt, so geben die Formeln I bis VI S. 31 ohne weiteres alle übrigen Abbildungsbeziehungen.

§ 26. Definition der Vergrößerung eines photographischen Objektives.

Wenn man das Bild eines Objektes auf der Mattscheibe einer Camera obscura betrachtet, so ist dieses Bild fast immer kleiner als das Objekt. Unter Vergrößerung eines photographischen Objektives verstehen wir nun das Verhältnis des Winkels σ, unter welchem man

Fig. 14.

das Bild auf der Mattscheibe aus der Entfernung d (konventionelle deutliche Sehweite) sieht, dividiert durch den Winkel u, unter welchem man von demselben Punkte aus das Objekt sieht (Fig. 14).

Rückt das Objekt ins Unendliche, so ist der Gesichtswinkel u, unter welchem es einem unbewaffneten Auge im Punkte A erscheint, gleich demjenigen Winkel, unter dem die von dem äußersten Punkte des Objektes herkommenden Strahlen die optische Achse schneiden, und die Vergrößerung ist

$$v = \frac{\sigma}{u}.$$

Da das Objekt im Unendlichen liegt, so ist wieder

$$y'_3 = h',$$

also nach Gleichung (36a)

$$f = \frac{h'}{u} = \frac{y'_3}{u}.$$

Weiter ist nach Figur 14

$$\sigma = \frac{y'_3}{d}.$$

Durch Division dieser beiden Gleichungen erhalten wir

$$\frac{f}{\sigma} = \frac{d}{u}$$

und demnach:

$$v = \frac{\sigma}{u} = \frac{f}{d}\,. \tag{43}$$

Die Vergrößerung eines Objektives ist also gleich der Brennweite dividiert durch die deutliche Sehweite. Da diese konventionell auf 250 mm angenommen wird, so hat ein Objektiv von 250 mm Brennweite die Vergrößerung 1, d. h. ein solches Objektiv läßt uns entfernte Gegenstände unter demselben Gesichtswinkel erscheinen, wie das unbewaffnete Auge. Ein Objektiv z. B. von 1 m Brennweite wirkt wie ein Fernrohr mit vierfacher Vergrößerung.

§ 27. Anwendung auf dünne Linsen.

Wir wollen zunächst annehmen, wir haben eine einzige Linse von der Dicke d, d. h. ein System von nur zwei brechenden Flächen, und zwar befinde sie sich in Luft, dann ist

$$n_1 = n_2' = 1\,,$$
$$n_1' = n_2 = n\,;$$

führen wir dies ein in unser System von Rekursionsformeln (Gleichung 37), so erhalten wir

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{n}{a_1'} = \dfrac{n-1}{r_1} \\[2ex] \dfrac{n}{a_2} + \dfrac{1}{a_2'} = \dfrac{1-n}{r_2} \end{cases} \quad a_1' + a_2 = d\,. \tag{44}$$

Nehmen wir nun an, daß die Linse unendlich dünn ist, d. h. daß ihre Dicke im Verhältnis zu den Radien und Vereinigungsweiten vernachlässigt werden kann, setzen also:

$$d = 0\,,$$

so wird

$$a_1' = -a_2\,,$$

und die Gleichungen (44) gehen über in

$$\begin{matrix} \dfrac{1}{a_1} - \dfrac{n}{a_2} = \dfrac{n-1}{r_1} \\[2ex] \dfrac{n}{a_2} + \dfrac{1}{a_2'} = \dfrac{1-n}{r_2} \end{matrix} \quad a_1' = -a_2\,.$$

Durch Addition entsteht:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2'} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right),$$

oder wenn man noch die objektseitige Schnittweite mit a, die bildseitige mit b bezeichnet:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right). \tag{45}$$

Angenähert können alle Brillengläser als Repräsentanten dieser Linsenform angesehen werden, von photographischen Objektiven die sogenannten Landschaftslinsen.

In diesem Falle fallen die beiden Hauptpunkte und die beiden Knotenpunkte in einem einzigen Punkte S, dem Scheitel der unendlich dünnen Linse, zusammen.

Da hier Bildraum und Objektraum denselben Brechungsexponenten haben, so sind die Brennweiten einander gleich (vgl. S. 28), also

$$f = f'.$$

Setzt man nun in (45)

$$a = \infty,$$

so fallen Brennweite und Bildweite zusammen, und wir erhalten

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right). \tag{46}$$

Aus Gleichung (46) in Verbindung mit Gleichung (45) ergibt sich die bekannte Formel

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}. \tag{46a}$$

Haben wir (Fig. 15) mehrere — wir wollen annehmen drei — zentrierte unendlich dünne Linsen, die sich im Abstande e_1 und e_2 voneinander befinden, so haben wir, wenn a_1, a_2, a_3 die objektseitigen, b_1, b_2, b_3 die bildseitigen Schnittweiten und f_1, f_2, f_3 die Brennweiten sind, folgendes Formelsystem:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f_1} \\ &\qquad\qquad b_1 + a_2 = e_1, \\ &\frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2} = \frac{1}{f_2} \\ &\qquad\qquad b_2 + a_3 = e_2. \\ &\frac{1}{a_3} + \frac{1}{b_3} = \frac{1}{f_3} \end{aligned}\right. \tag{47}$$

Wenn auch die photographischen Objektive im allgemeinen sehr von dünnen Linsen verschieden sind, so ist doch die Kenntnis der Eigenschaften der letzteren für den ersten Überblick unentbehrlich.

Fig. 15.

Nimmt man an, daß die Abstände der Linsen voneinander unendlich klein sind, daß also

$$e_1 = e_2 = 0$$

ist, so wird

$$b_1 = -a_2\,,$$
$$b_2 = -a_3\,.$$

Die Gleichungen (47) liefern dann nach einigen Umformungen:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_3} = \sum \frac{1}{f}\,, \tag{48}$$

eine Formel, welche der für eine einzige unendlich dünne Linse geltenden sehr ähnlich ist.

§ 28. Konstruktion des Bildes für eine unendlich dünne Linse.

Man ziehe durch den Scheitel S (Fig. 16) von dem Objektpunkte Q aus einen Strahl, der die Linse durchdringt, ohne von seiner Richtung abgelenkt zu werden. Dann ziehe man ferner von Q aus einen achsenparallelen Strahl QC, der nach der Brechung durch den hinteren Brennpunkt F' geht. Die Strahlen CF' und QS schneiden sich verlängert in dem gesuchten Bildpunkte Q'.

Fig. 16.

Fällt man von Q' ein Lot $Q'P'$ auf die optische Achse, so ist dies das gesuchte Bild $Q'P'$ von QP.

Diese Konstruktion behält ihre Gültigkeit, auch wenn sich das Objekt rechts von der Linse befindet. Dies ist z. B. der Fall, wenn das Objekt in der Natur gar nicht vorhanden ist, sondern wenn ein Bild von einem Objekte durch eine andere Linse entworfen wird und auf der rechten Seite unserer Linse zustande kommen würde. Geome-

[illegible] ist es dann so aufzufassen, als ob es wirklich rechts vorhanden wäre. Dieser Fall ist in Figur 17 dargestellt, wo sämtliche Buchstaben eine analoge Bedeutung haben wie in Figur 16.

Auch für eine negative Linse behält diese Konstruktion ihre Gültigkeit (Fig. 18).

Eine negative Linse unterscheidet sich von einer positiven dadurch, daß sie parallele Strahlen nicht sammelt, sondern zerstreut, daß

Fig. 17.

Fig. 18.

also parallele Strahlen nicht durch den Brennpunkt F' gehen, sondern von F' herzukommen scheinen. Der Brennpunkt F' liegt in diesem Falle links. Derartige Linsen erzeugen immer ein verkleinertes, aufrecht stehendes Bild auf der Objektseite.

§ 29. Brennweite zweier dünnen Linsen im Abstande e.

Aufgabe: Die Brennweite eines Systemes von zwei dünnen, auf einer Achse zentrierten Linsen, die sich im Abstande e voneinander befinden, aus den Konstanten der Linsen rechnerisch zu bestimmen.

Lösung: Die Brennweiten der beiden Linsen seien f_1 und f_2, dann gelten für dieses System die Formeln:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f_1} \qquad b_1 + a_2 = e\,.$$
$$\frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2} = \frac{1}{f_2}$$

Um den bildseitigen Brennpunkt F' dieses Systemes zu finden, setzen wir in diesen Formeln einfach

$$a_1 = \infty\,,$$

dann wird

$$b_1 = f_1\,,$$

$$a_2 = e - f_1 \tag{49}$$

und schließlich

$$\frac{1}{b_2} = \frac{1}{f_2} - \frac{1}{e - f_1} . \tag{50}$$

Damit ist die Lage des bildseitigen Brennpunktes F' bestimmt.

Schwieriger ist die Berechnung der Brennweite selbst. Von der Spitze eines unendlich fernen Objektes gehe ein Strahl unter einem Winkel u durch den Scheitel S_1 der ersten Linse (Fig. 19). Derselbe geht durch die Spitze des von der ersten Linse in ihrer Fokalebene

Fig. 19.

erzeugten Bildes y_1'. Durch die zweite Linse wird nun ferner von y_1' ein neues Bild $y_2' = F'Q'$ erzeugt. Unter Berücksichtigung der in der Figur 19 angegebenen Bezeichnungen für die in Frage kommenden Strecken erhält man wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke $Q_1 F_1' S_2$ und $F' Q' S_2$:

$$\frac{y_2'}{y_1'} = \frac{b_2}{a_2} ,$$

und weiter ist (Fig. 19)

$$u = \frac{y_1'}{f_1} .$$

Durch Elimination von y_1' aus diesen beiden Gleichungen finden wir

$$\frac{y_2'}{u} = \frac{f_1 \cdot b_2}{a_2} ,$$

nach der Definition der Brennweiten zufolge Gleichung (35) ist aber hier

$$f = \frac{y_2'}{u} ,$$

also ist

$$f = \frac{f_1 \cdot b_2}{a_2} .$$

In diese Gleichung setzen wir für a_2 und b_2 ihre Werte aus Gleichung (49) und (50) ein und erhalten

$$\frac{1}{f} = \frac{e - f_1}{f_1}\left(\frac{1}{f_2} - \frac{1}{e - f_1}\right) = \frac{e - f_1}{f_1 \cdot f_2} - \frac{1}{f_1} = \frac{e}{f_1 \cdot f_2} - \frac{1}{f_2} - \frac{1}{f_1}$$

$$\frac{1}{f} = -\left[\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{e}{f_1 \cdot f_2}\right]. \tag{51}$$

Damit ist die Brennweite f des Systemes bestimmt, also unsere Aufgabe gelöst.

Wie wir sehen, hat das System aus diesen beiden Linsen also eine Brennweite, welche von der Entfernung e der beiden Linsen voneinander sowie von den Brennweiten f_1 und f_2 der beiden Linsen abhängt. Man kann also durch passende Verfügung über f_1 und f_2 alle möglichen Systeme erhalten.

Das Minuszeichen in Gleichung (51) rührt daher, daß wir gemäß Figur 19 vorausgesetzt haben, daß unser System ein aufrechtes Bild liefert. Wir haben im Unendlichen ein Objekt links unten. Dieses entwirft durch die erste Linse ein umgekehrtes Bild y_1', und von diesem wird wieder ein umgekehrtes Bild y_2' entworfen. Das Bild hat also dieselbe Stellung wie das Objekt. In der photographischen Optik kommen jedoch nur solche Linsenkombinationen in Betracht, die von einem fernen Objekte umgekehrte Bilder liefern. Man kann daher das Minuszeichen weglassen und hat als Gesamtbrennweite eines Systemes zweier Linsen mit den Brennweiten f_1 und f_2, wenn sich die Linsen im Abstande e voneinander befinden,

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{e}{f_1 \cdot f_2}. \tag{52}$$

§ 30. Das Teleobjektiv.

Die Formel (52) führt zur Theorie des Teleobjektives, welches in der neueren Zeit ziemlich viele Liebhaber gefunden hat.

Wenn wir ein beliebiges Objektiv haben, welches auf der Mattscheibe der Camera ein Bild entwirft, so ist die Vergrößerung der Brennweite proportional. Da wir nun übermäßig lange Cameras nur unbequem verwenden können, so ist es praktisch ausgeschlossen, die Vergrößerung über ein gewisses Maß hinauszutreiben. (Eine Vergrößerung von 4 erfordert schon eine Brennweite von 100 cm.) Die Bedeutung des Teleobjektives liegt nun darin, diesem Übelstande abzuhelfen. Es besteht aus einer Kombination von zwei Linsen, deren

Brennweiten f_1 und f_2 so abgemessen sind, daß die Gesamtbrennweite f sehr groß wird, ohne daß f_1 und f_2 und die fokale Schnittweite b_2 übermäßig groß sind. Zu diesem Zwecke wählen wir f_2 negativ. Unsere Formel (52) geht dann über in

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} + \frac{e}{f_1 \cdot f_2}. \tag{53}$$

Die Bedeutung dieser Formel machen wir uns klar an einem Beispiel. Es sei

$$f_1 = 20 \text{ cm}, \quad f_2 = 5 \text{ cm}, \quad e = 16 \text{ cm},$$

dann ist also

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{20} - \frac{1}{5} + \frac{16}{5 \cdot 20} = \frac{1}{100},$$

$$f = 100 \text{ cm}.$$

Aus Gleichung (50) folgt dann weiter $b_2 = 20$ cm.

Dieses zusammengesetzte Objektiv entwirft in 20 cm Entfernung ein ebenso großes Bild als ein einfaches Objektiv in der Entfernung $5 \cdot 20 = 100$ cm.

Kapitel 3.

Die Strahlenbegrenzung.

---

§ 31. Allgemeine Vorbemerkungen.

Unter einer Blende versteht man im allgemeinen eine zur optischen Achse senkrechte kreisförmige Öffnung, deren Mittelpunkt auf der Achse liegt. Ein System kann mehrere solcher Blenden haben; von ihren Durchmessern hängt die Begrenzung der das System durchdringenden Strahlen ab. Die Wirkung der Blenden ist eine doppelte.

Sie bestimmen erstens den Öffnungswinkel der von einem einzelnen Objektpunkte ausgehenden Strahlen und damit gewissermaßen die Strahlenmenge, durch welche die Abbildung der einzelnen Objektpunkte vermittelt wird. (Strahlenbegrenzung wegen der Helligkeit).

Zweitens bestimmen sie die äußerste Neigung der von seitlich der Achse gelegenen Punkten ausgehenden und das System noch gerade durchdringenden Bündel (Strahlenbegrenzung wegen des Gesichtsfeldes).

§ 32. Strahlenbegrenzung wegen der Helligkeit.

Ein brechendes System möge eine bestimmte Anzahl von Blenden haben. Wir bilden diese sämtlich nach der Objektseite hin ab und erhalten so eine Reihe diesen Blenden entsprechender Blendenbilder im Objektraume.

Dasjenige Blendenbild nun, das von dem Fußpunkte des in Frage kommenden Objektes aus unter dem kleinsten Gesichtswinkel erscheint, ist maßgebend für die Weite der das System durchdringenden Bündel, welche die Abbildung der einzelnen Punkte vermitteln.

Dieses Blendenbild nennen wir die Eintrittspupille (EP), die zugehörige Blende selbst die Aperturblende (AB), das nach dem Bildraume zu entworfene Bild der Aperturblende heißt Austrittspupille (AP).

Bestehe z. B. das System (Fig. 20) aus den drei Partialsystemen S_1, S_2, S_3 und sind darin die Blenden *I, II, III, IV* enthalten, bilden wir diese vier Blenden nach links durch den in dieser Richtung vorgelagerten Systemteil ab (d. h. nach der Objektseite zu), so mögen die Blendenbilder *I', II', III', IV'* entstehen, wo also *I'* das Bild von *I, II'* das Bild von *II* usw. sei. Sei ferner *P* der Fußpunkt des Objektes, das durch das System abgebildet werden soll, für das also die Strahlenbegrenzung festzustellen ist, so muß man gemäß den obigen Ausführungen dasjenige Blendenbild suchen, das von *P* aus unter dem kleinsten Gesichtswinkel erscheint. Nach dem Beispiel der Figur 20

Fig. 20.

ist dies das Bild *II'*, denn wenn man dessen Endpunkte α und β mit *P* verbindet, so ist der Winkel $\alpha P \beta$ offenbar kleiner als alle anderen Winkel, welche man erhält, wenn man die Endpunkte der anderen Blendenbilder mit dem Punkte *P* verbindet. Das Bild *II'* ist also in dem vorliegenden Falle die Eintrittspupille (EP) für das bei *P* befindliche Objekt. Die (EP) kann reell oder virtuell, umgekehrt oder aufrecht sein in Hinsicht auf die Blende *II*, welche in unserem Beispiel als Aperturblende wirkt, ferner kann sie rechts, links oder inmitten des optischen Systemes liegen.

Bildet man nun ferner die Aperturblende (in unserem Beispiel die Blende *II*) nach dem Bildraume hin ab durch den nach rechts hin vorgelagerten Systemteil, so findet man die Austrittspupille (AP). Bei photographischen Systemen wirken als Aperturblende entweder eigens vorgesehene Blenden oder auch die Ränder der Linsenfassungen.

Um die Bedeutung der Ein- und Austrittspupille anschaulich zu machen, knüpfen wir unsere weiteren Betrachtungen an die Figur 21. Es ist dort der Durchmesser der (EP) $= AB = 2\varrho$, der der (AP) $= A'B' = 2\varrho'$ dargestellt, während R und R' die Mittelpunkte der Pupillen darstellen. Diese letzteren Punkte sind konjugierte Punkte, ähnlich wie die Hauptpunkte und Knotenpunkte und sind Bilder des Mittelpunktes der Aperturblende, die jedoch in Figur 21 nicht gezeichnet ist.

Sei nun PQ ein beliebiges Objekt, so entspricht dem Strahl QA im Objektraume der Strahl $A'Q'$ im Bildraume, weil ja A zu A' und Q zu Q' konjugiert ist. Ebenso gehört zum Strahle QB der Strahl $Q'B'$. Man kann also die (EP) mit dem Radius ϱ als die Basis aller eintretenden und die (AP) mit dem Radius ϱ' als die Basis aller austretenden Lichtbündel auffassen. Dabei füllen die Lichtbündel

Fig. 21.

gerade die ganze Aperturblende aus, die jedoch, wie schon bemerkt, in Figur 21 nicht gezeichnet ist. Für die konjugierten Punkte P und P' z. B. sind diese Bündel durch die Kegel APB und $A'P'B'$ dargestellt, für die konjugierten Punkte Q und Q' durch die Kegel AQB und $A'Q'B'$ im Schnitte mit den $R \cdot A$ dargestellt.

Während wir mittels der sogenannten Kardinalpunkte wohl erfahren, wo das Bild Q' eines Punktes Q liegt, erhalten wir mittels der (EP) und (AP) erst Auskunft darüber, welche physischen Strahlen eigentlich die Abbildung vermitteln. Eine Reihe von Fragen, wie z. B. über die Lage und Größe der Zerstreuungskreise, über die Bedingungen der Orthoskopie und über die Helligkeitsabnahme nach der Peripherie der Mattscheibe hin können erst mittels dieser Strahlenbegrenzung ihre exakte Beantwortung finden.

Da beim Aufsuchen der (EP) insbesondere, wenn das System mehrere Blenden aufweist, (Fig. 20), der Fußpunkt P des Objektes maßgebend ist, so kann der Fall eintreten, daß für verschiedene Entfernungen des Objektes verschiedene Blenden als Aperturblenden wirken. Wir wollen nur noch den für die Photographie wichtigsten Fall näher betrachten, daß das Objekt PQ sehr weit entfernt ist. In diesem Falle ist ersichtlich diejenige Blende als Aperturblende anzusehen, deren Bild im Objektraume den kleinsten linearen Durchmesser hat. Alle einfallenden Strahlenbündel degenerieren zu Zylindern,

während die aus der (AP) austretenden Bündel kegelförmig sind und ihre Spitze in der hinteren Brennebene des Objektives haben. Bemerken wollen wir noch, daß auch häufig der Fall eintritt, daß zwar die vom Fußpunkte des Objektes ausgehenden Bündel (für den Fall sehr entfernter Objekte also der achsenparallele Strahlenzylinder) die (EP), die Aperturblende und die (AP) vollständig durchdringen, während die stark geneigten Strahlenbündel zum Teil durch andere Blenden des Systemes oder durch die Linsenfassungen abgeblendet werden. In diesem Falle macht sich ein starker Lichtabfall nach dem Rande der Platte zu bemerkbar. Diese Erscheinung bezeichnet man mit dem Namen „Vignettieren".

§ 33. Die Pupillenmitten als Ausgangspunkte für die Schnittweiten.

Als Ausgangspunkte für die Zählung der Schnittweiten haben wir vorwiegend die Linsenscheitel oder die Brennpunkte des Systemes gewählt. Wir wollen jetzt als Fixpunkte die Mittelpunkte R und R' der (EP) und (AP) wählen. Dabei wollen wir das Vergrößerungsverhältnis in den Pupillen mit B bezeichnen und wollen zunächst folgende Aufgabe lösen:

Aufgabe: Von einem konjugierten Punktpaare R, R' ist die Vergrößerung B gegeben. Welche Entfernung x_0, x_0' haben diese Punkte von den Hauptbrennpunkten F und F' des Systemes? F ist in Fig. 21 zwischen P und R, F' zwischen P' und R' liegend anzunehmen.

Zufolge der Grundformeln der Dioptrik bestehen gemäß § 22 die Gleichungen:

$$x_0 x_0' = f f' \quad \text{und} \quad B = \frac{f}{x_0} = \frac{x_0'}{f'},$$

wenn f und f' die Brennweiten des Systemes sind und in Figur 21 $x_0 = FR$ und $F'R' = x_0'$ ist. Aus den letzten Gleichungen folgt:

$$\text{(53a)} \qquad \begin{cases} x_0 = \dfrac{f}{B}, \\ x_0' = f'B, \end{cases}$$

wodurch unsere Aufgabe gelöst ist.

Setzen wir jetzt (Fig. 21)

$$PR = \xi, \qquad P'R' = \xi',$$
$$PF = x, \qquad P'F' = x',$$

so ist:

$$(53\text{b})\qquad \begin{cases} x + x_0 = \xi = PR\,, \\ x' + x_0' = \xi' = P'R'\,. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (53a) und (53b) folgt nun unter Berücksichtigung von $x \cdot x' = f \cdot f'$

$$\frac{f}{B} \cdot \frac{1}{\xi} + \frac{f'B}{\xi'} = 1\,,$$

wo also jetzt die Schnittweiten ξ und ξ' auf die Pupillenmitten bezogen sind.

Die (AP), d. h. der Kreis mit dem Radius $R'A' = R'B'$, ist die Basis der austretenden Strahlen und zwar für jede beliebige Neigung des einfallenden Strahlenbündels.

In der Figur 22 ist noch ein aus zwei positiven kongruenten Teilsystemen bestehendes Objektiv dargestellt, bei dem die Aperturblende NV in der Mitte zwischen den Teilsystemen sich befindet,

Fig. 22.

ein Fall, der in der photographischen Praxis häufig vorkommt. Diese Teilsysteme stehen wohl immer so dicht aneinander, daß NV innerhalb der Fokalentfernung sich befindet, so daß in diesem Falle sowohl die (EP) wie auch die (AP) virtuell und vergrößert sind. Die erste ist durch AB, die andere durch $A'B'$ in Figur 22 dargestellt.

Ein einfallender Strahl PQ, der nach der Brechung durch das erste System durch den Mittelpunkt M der Aperturblende geht, muß im Objektraume durch die Mitte R der (EP) gehen oder doch, wie im Falle der Figur 22, wo die (EP) virtuell ist, auf diesen Punkt hingerichtet sein. Analog geht der austretende Strahl $Q'P'$ rückwärts verlängert durch die Mitte R' der (AP). Objektive der durch Figur 22 dargestellten Art heißen symmetrisch.

§ 34. Konstruktion der Bilder mittels Hauptstrahlen.

Die Verbindungslinie irgend eines seitlich gelegenen Objektpunktes Q mit dem Mittelpunkte R der (EP) nennt man Hauptstrahl. Diese Strahlen sind nicht mit den durch die Hauptpunkte gezogenen Strahlen zu verwechseln, die in der Literatur gelegentlich

auch wohl als Hauptstrahlen bezeichnet worden sind. Er ist gewissermaßen die „Schwerlinie“ des einfallenden Lichtbündels und bleibt von dem letzteren allein noch übrig, wenn man die Durchmesser der Pupillen unendlich klein werden läßt. Ist das Konvergenzverhältnis Γ in den Pupillen gegeben, so kann man leicht mittels der Hauptstrahlen das Bild eines Objektes konstruieren. Ist z. B. das Objekt sehr weit entfernt, so zieht man (Fig. 21) von einem seitlich liegenden Objektpunkte Q den Hauptstrahl QR, der mit der Achse den Winkel w bilde. Legt man durch R' unter der Neigung $w' = \Gamma \cdot w$ einen Strahl (den bildseitigen Hauptstrahl), so durchstößt dieser die Fokalebene (Mattscheibe) im Bildpunkte Q' von Q, wo noch daran erinnert werden möge, daß die Größen Γ und B in der Beziehung $\Gamma \cdot B = 1$ stehen. In den Figuren 21 und 22 ist der Gang von Hauptstrahlen dargestellt.

In Figur 22 ist $PQLMLQ'P'$ ein Hauptstrahl. Ersichtlich gehen alle Hauptstrahlen durch den Mittelpunkt M der Aperturblende.

§ 35. Strahlenbegrenzung wegen des Gesichtsfeldes.

Mittels der Hauptstrahlen gelingt die exakte Bestimmung des Gesichtsfeldes eines Objektives. Solange nämlich von einem seitlich gelegenen Punkte noch Hauptstrahlen das System durchdringen, wird der Punkt noch auf der Mattscheibe abgebildet. Diese Bedingung ist aber damit identisch, daß der Hauptstrahl QR (Fig. 21) sämtliche im Objektraume liegenden Blendenbilder schneidet, d. h. nicht über sie hinweggeht. Das Gesichtsfeld im Objektraume ist also durch diejenige Blende bestimmt, deren Bild im Objektraume von R aus unter dem kleinsten Gesichtswinkel erscheint. Dieses Bild ist in neuerer Zeit als „Eintrittsluke“ bezeichnet, während das zugehörige Bild im Bildraume die „Austrittsluke“ heißt. Das bildseitige Gesichtsfeld eines Objektives wird durch den Kegel bestimmt, dessen Spitze die Mitte der (AP) und dessen Basis die Austrittsluke ist. Auf der Mattscheibe ist das Gesichtsfeld abgegrenzt durch den Kreis, in welchem sie von diesem Kegel geschnitten wird.

§ 36. Bemerkung zur Theorie der Strahlenbegrenzung.

Die Lehre von der Strahlenbegrenzung ist definiert zunächst im Anschlusse an den paraxialen Strahlengang. Sie wird dadurch besonders nützlich, daß die Mittelpunkte der (EP), der (AP) und der Aperturblende auch unter Voraussetzung der Existenz endlich geöffneter

und geneigter Bündel eine gewisse, später noch näher zu definierende Bedeutung behalten.

Bemerkt sei noch, daß zufolge der gegebenen Theorie der Ort der Aperturblende und damit auch der Ort der Pupillen beliebig ist. Man kann a priori keinen Punkt der Achse angeben, welcher für den Strahlengang irgendwelche Vorteile böte. Diese Willkür fällt aber fort, sobald wir die durch den „endlichen Strahlengang“ bedingten Abweichungen von der Gaußschen Abbildung näher in Betracht ziehen. Wir werden dadurch zu neuen, wichtigen Definitionen — der natürlichen Blende und der Abbildung durch Fundamentalstrahlen — geführt. (Vgl. Kap. 9.)

Kapitel 4.

Die Achromasie.

---

§ 37. Achromasie der Schnittweiten.

Die Formeln des paraxialen Gebietes waren unter der Voraussetzung abgeleitet, daß die Brechungsexponenten konstant seien, d. h. daß wir Licht von einer bestimmten Farbe dabei voraussetzten. Gehen wir jedoch von einer Farbe zur anderen über, so treten Änderungen auf, die sich auf alle Abbildungsfaktoren erstrecken. Wir beginnen mit der Diskussion des praktisch wichtigsten Falles, nämlich der Änderung der fokalen Schnittweite beim Übergang von einer Farbe zur anderen.

Denken wir uns das System von Rekursionsformeln (Gleichung 37 in § 25) für $\varkappa$ brechende Flächen hingeschrieben und darin $a_1 = \infty$ gesetzt, so ergibt sich die fokale Schnittweite $a'_\varkappa$.

Wenn es sich darum handelt, $a'_\varkappa$ für die verschiedenen Farben, aber für ein und dasselbe System zu berechnen, so werden sich von dessen Konstanten die Radien und Dicken nicht, wohl aber die Brechungsexponenten $n_1, n_2, \ldots n_\varkappa$ ändern, die Größe $a'_\varkappa$ ist also eine Funktion dieser Veränderlichen $n_1 \ldots n_\varkappa$. Es sei für die D-Linie, wenn φ das Zeichen für eine Funktion ist:

$$a'_\varkappa = \varphi(n_1, n_2, \ldots n_\varkappa).$$

Will man jetzt von der D-Linie zu irgend einer anderen, z. B. zur G'-Linie übergehen, so muß man die Brechungsexponenten sich ein wenig ändern lassen. Diese Änderungen sind nun so klein, daß man sie mit genügender Genauigkeit als Differentiale auffassen kann. Wenn man also die Zunahme $da'_\varkappa$ von $a'_\varkappa$ beim Übergange von der D-Linie zu der G'-Linie finden will, so hat man die obige Gleichung nur zu differenzieren. Wir erhalten:

$$da'_\varkappa = \frac{\partial \varphi}{\partial n_1} dn_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial n_2} dn_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial n_3} dn_3 + \ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial n_\varkappa} dn_\varkappa.$$

Jetzt soll das System achromatisch sein, d. h. $a'_\varkappa$ soll für die D-Linie und für die G'-Linie denselben Wert erhalten. Die Zunahme $d a'_\varkappa$ von $a'_\varkappa$ beim Übergang von der D-Linie zur G'-Linie muß also gleich Null sein. Wir haben also für die Bedingung der Achromasie:

$$(54) \qquad 0 = \frac{\partial \varphi}{\partial n_1} d n_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial n_2} d n_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial n_3} d n_3 + \ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial n_\varkappa} d n_\varkappa .$$

Die Größen $d n_1, d n_2, d n_3, \ldots d n_\varkappa$ sind als bekannte Größen zu betrachten und können aus den Produktionsverzeichnissen der optischen Werkstätten entnommen werden. Gleichung (54) stellt dann eine neue Beziehung zwischen den Konstanten des Systemes dar.

Man kann auch von der D-Linie zu irgend einer anderen Linie, z. B. zur F-Linie, übergehen. Die unendlich kleinen Änderungen, welche die Brechungsexponenten bei diesem Übergange erleiden, seien $d\bar{n}_1, d\bar{n}_2, \ldots d\bar{n}_\varkappa$. Die Zunahme von $a'_\varkappa$ bei diesem Übergange von der D-Linie zu der F-Linie sei $d\bar{a}'_\varkappa$. Dann erhalten wir

$$d\bar{a}'_\varkappa = \frac{\partial \varphi}{\partial n_1} d \bar{n}_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial n_2} d \bar{n}_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial n_3} d \bar{n}_3 + \ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial n_\varkappa} d \bar{n}_\varkappa .$$

Soll $a'_\varkappa$ für die D-Linie und die F-Linie auch zusammenfallen, so muß

$$d\bar{a}'_\varkappa = 0$$

sein, und wir haben also als Bedingung dafür, daß die Brennpunkte für drei Farben zusammenfallen:

$$d a'_\varkappa = 0 ,$$
$$d \bar{a}'_\varkappa = 0 .$$

Man bezeichnet diesen Vorgang als Aufhebung des **sekundären Spektrums**. Wenn man noch eine Farbe in demselben Punkte konzentriert, so spricht man von Aufhebung des **tertiären Spektrums** usw.

§ 38. Anwendung dieser Methode auf ein System mit nur zwei Brechungsexponenten.

Das vorgelegte System bestehe aus zwei Glassorten mit den Brechungsexponenten n und N, dann ist unter Voraussetzung von $\varkappa$-Flächen:

$$(55) \qquad a'_\varkappa = \varphi(n, N) .$$

Wenn nun für den Übergang von der D-Linie zur G'-Linie die Änderungen der Brechungsexponenten

$$n_{G'} - n_D = d n \quad \text{und} \quad N_{G'} - N_D = d N$$

gesetzt werden, so muß, wenn das System achromatisch sein soll,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n}(n_{G'} - n_D) + \frac{\partial \varphi}{\partial N}(N_{G'} - N_D) = 0 \tag{56}$$

sein.

Soll das System frei vom sekundären Spektrum sein, d. h. sollen sich drei Farben streng im Fokus vereinigen, so muß noch die Gleichung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n}(n_D - n_C) + \frac{\partial \varphi}{\partial N}(N_D - N_C) = 0 \tag{57}$$

bestehen, wenn wir als dritte Farbe etwa die der C-Linie wählen. Aus der Gleichung (56) findet man

$$\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial n}}{\frac{\partial \varphi}{\partial N}} = -\frac{N_{G'} - N_D}{n_{G'} - n_D}, \tag{58}$$

und aus Gleichung (57) ergibt sich

$$\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial n}}{\frac{\partial \varphi}{\partial N}} = -\frac{N_D - N_C}{n_D - n_C}, \tag{59}$$

und durch Vergleich von (58) und (59) entsteht:

$$\frac{n_{G'} - n_D}{n_D - n_C} = \frac{N_{G'} - N_D}{N_D - N_C}. \tag{60}$$

Dies ist eine Beziehung, die ganz unabhängig ist von der Funktion φ und nur abhängt von den Brechungsexponenten der beiden Glassorten. Glassorten, die der Bedingung (60) nahezu entsprechen, sind nach dem Verzeichnis von Schott u. Gen. z. B.

0.225 und 0.35 ,
0.60 und 0.164 .

§ 39. Proportionaler Gang der Dispersion.

Wir haben bereits oben (vgl. S. 7) gesehen, daß die von verschiedenen Glassorten erzeugten Spektren gänzlich verschieden sind. Wenn es gelänge, zwei Glassorten zu finden, welche ähnliche, aber nicht kongruente Spektren erzeugen, so würden damit der praktischen Optik außerordentliche Dienste geleistet sein. Wenn wir

nämlich für zwei solcher Glassorten zwei Farben vereinigt hätten, so hätten wir alle Farben in einem Punkte vereinigt. Diese Behauptung wollen wir jetzt beweisen.

Wir nehmen ein System aus zwei Glassorten an mit den Brechungsexponenten n und N. Dann ist

$$a'_x = \varphi(n, N),$$

und um einfache Achromasie zu haben, muß

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} \alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial N} \beta = 0 \tag{61}$$

sein, wo α und β die Änderungen sind, welche die Brechungsexponenten n und N beim Übergange von einer Farbe zu einer anderen erleiden. Gehen wir zu einer neuen Farbe über, so kommt als Bedingung der Aufhebung des sekundären Spektrums noch die Gleichung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} \alpha_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial N} \beta_1 = 0$$

hinzu, wo α_1 und β_1 die entsprechenden kleinen Änderungen der Brechungsexponenten sind. Als Bedingung der Aufhebung des tertiären Spektrums kommt noch die Gleichung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} \alpha_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial N} \beta_2 = 0$$

hinzu und so fort bis zur Aufhebung eines beliebigen $(\lambda + 1)^{\text{ten}}$ Spektrums, wofür wir $(\lambda + 1)$ derartige Gleichungen hätten. Die letzte Bedingungsgleichung würde lauten

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} \alpha_\lambda + \frac{\partial \varphi}{\partial N} \beta_\lambda = 0 .$$

Wenn alle diese Gleichungen erfüllt wären, so hätten wir λ Farben in einem Punkte vereinigt.

Diese Gleichungen sprechen ein sehr einfaches Gesetz aus. Setzen wir zur Abkürzung für einen Augenblick:

$$\frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial n}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial N}} = -\frac{1}{A},$$

so ergibt sich aus den vorstehenden Gleichungen der Reihe nach:

$$(62)\qquad \begin{cases} \alpha = A \cdot \beta\,, \\ \alpha_1 = A \cdot \beta_1\,, \\ \alpha_2 = A \cdot \beta_2\,, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \alpha_\lambda = A \cdot \beta_\lambda\,. \end{cases}$$

Beachten wir nun, daß $\alpha, \alpha_1, \dots \alpha_\lambda$ die Änderungen des Brechungsexponenten n und $\beta, \beta_1, \dots \beta_\lambda$ die entsprechenden Änderungen des Brechungsexponenten N sind, so sagt das System von Gleichungen (62) aus, daß die Änderungen α proportional den entsprechenden Änderungen β sind, d. h. daß das Spektrum des einen Glases dem des anderen Glases ähnlich ist. Man drückt dies auch aus, indem man spricht vom „proportionalen Gang der Dispersion". In diesem Falle würden wir also vollendete Farbenreinheit haben. Wenn auch die Herstellung zweier solcher Glassorten noch nicht gelungen, so hat man doch schon Glassorten gefunden, welche dem proportionalen Gange der Dispersion ziemlich nahe kommen.

§ 40. Mittlere Dispersion. Crown- und Flintglas.

Es seien zwei dünne Linsen gegeben. Die erste habe die Radien r_1 und r_2 und die Brennweite f_1, die zweite die Radien r_3 und r_4 und die Brennweite f_2. Die Dicke beider Linsen sei gleich Null, und auch die Entfernung der beiden Linsen voneinander möge zunächst vernachlässigt werden. Wenn noch n_1 der Brechungsexponent der ersten, n_2 der der zweiten Linse ist, so hat man:

$$\frac{1}{f_1} = (n_1 - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right),$$

$$\frac{1}{f_2} = (n_2 - 1)\left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4}\right),$$

und die Gesamtbrennweite des Systemes beider Linsen ist (vgl. die Formeln 46a und 48)

$$(63)\qquad \frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}\,.$$

Wir wollen die Bedingung aufsuchen, unter welcher diese beiden Linsen achromatisch sind unter der Voraussetzung eines unendlich

fernen Objektes. In einem Systeme dünner Linsen fällt die fokale Schnittweite mit der Brennweite zusammen, also ist

$$f = a'_\varkappa \quad \text{und} \quad df = da'_\varkappa \,.$$

Durch Differentiation von Gleichung (63) ergibt sich

$$(64) \qquad -\frac{1}{f^2}\,df = -\frac{1}{f_1^2}\,df_1 - \frac{1}{f_2^2}\,df_2 \,.$$

Wir wollen zur Abkürzung setzen

$$(65) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2} = \varkappa_1 \,, \\[2ex] \dfrac{1}{r_3} - \dfrac{1}{r_4} = \varkappa_2 \,, \end{cases} \quad \text{also} \quad \begin{aligned} \frac{1}{f_1} &= (n_1 - 1)\cdot\varkappa_1 \,, \\ \frac{1}{f_2} &= (n_2 - 1)\cdot\varkappa_2 \,. \end{aligned}$$

Durch Differentiation der Gleichungen (65) erhalten wir

$$-\frac{1}{f_1^2}\,df_1 = dn_1\cdot\varkappa_1 \,,$$

$$-\frac{1}{f_2^2}\,df_2 = dn_2\cdot\varkappa_2 \,,$$

oder wenn wir für $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ ihre Werte aus den Gleichungen (65) einsetzen:

$$(65\text{a}) \qquad -\frac{1}{f_1^2}\,df_1 = \frac{dn_1}{f_1(n_1 - 1)} \,,$$

$$(65\text{b}) \qquad -\frac{1}{f_2^2}\,df_2 = \frac{dn_2}{f_2(n_2 - 1)} \,.$$

Aus diesen beiden Gleichungen in Verbindung mit Gleichung (64) ergibt sich:

$$(66) \qquad -\frac{1}{f^2}\,df = \frac{dn_1}{f_1(n_1 - 1)} + \frac{dn_2}{f_2(n_2 - 1)} \,.$$

Da wir die Bedingung für die Achromasie aufstellen wollen, so muß

$$df = da'_\varkappa = 0$$

gesetzt werden; also erhalten wir aus Gleichung (66):

$$(67) \qquad 0 = \frac{dn_1}{f_1(n_1 - 1)} + \frac{dn_2}{f_2(n_2 - 1)} \,.$$

Man bezeichnet nun ganz allgemein die Größe $\frac{dn}{n-1}$, d. h. die Änderung, welche der Brechungsexponent der D-Linie beim Übergange zu irgend einer anderen Farbe erleidet, dividiert durch den

um 1 verminderten Brechungsexponenten mit $\frac{1}{\nu}$ und nennt ν die **mittlere Dispersion**. Demnach ist

$$(68) \qquad \begin{cases} \dfrac{d n_1}{n_1 - 1} = \dfrac{1}{\nu_1}, \\ \dfrac{d n_2}{n_2 - 1} = \dfrac{1}{\nu_2}, \end{cases}$$

und Gleichung (67) geht über in

$$0 = \frac{1}{f_1 \nu_1} + \frac{1}{f_2 \nu_2}$$

oder

$$f_1 \nu_1 + f_2 \nu_2 = 0$$

oder

$$(69) \qquad \frac{f_1}{f_2} = -\frac{\nu_2}{\nu_1},$$

d. h. zwei unendlich dünne und einander unendlich nahe Linsen bilden ein achromatisches System, wenn sich die Brennweiten umgekehrt verhalten wie die mittleren Dispersionen. Diese mittleren Dispersionen findet man in jedem Produktionsverzeichnis angegeben, und nach ihnen sind die Glassorten geordnet. Glassorten mit großem ν werden als **Crowngläser** (sie zerstreuen die Farben schwächer), solche mit kleinem ν als **Flintgläser** (sie zerstreuen die Farben stärker) bezeichnet. In dem Kataloge von Schott u. Gen. geht die Numerierung von $\nu = 70$ bis $\nu = 19{,}7$.

Das negative Vorzeichen der Formel (69) sagt aus, daß die beiden dünnen Linsen, welche ein achromatisches System bilden, verschiedenes Vorzeichen der Brennweiten haben müssen, d. h. daß sich für den gedachten Zweck immer nur eine Kombination einer positiven und einer negativen Linse eignet.

Verlangen wir z. B., daß das System die positive Brennweite gleich Eins habe, so besteht zufolge der Gleichung (63) die Beziehung:

$$\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = 1,$$

und unter Berücksichtigung von (69) erhält man:

$$(70) \qquad \begin{cases} f_1 = \dfrac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_1}, \\ f_2 = -\dfrac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_2}. \end{cases}$$

Wir betrachten noch den Fall zweier dünner Linsen, die sich in einem Abstande e voneinander befinden.

Differenziert man Gleichung (50), indem man b_2, f_1 und f_2 als variabel ansieht, und setzt dann $d b_2 = 0$, so erhält man unter Berücksichtigung der Gleichungen (65a) und (65b), die hier ebenfalls gültig sind:

$$(71) \qquad 0 = \frac{d n_1}{n_1 - 1} \cdot \frac{1}{f_1} + \frac{d n_2}{n_2 - 1} \cdot \frac{1}{f_2} \cdot \left(\frac{e - f_1}{f_1}\right)^2$$

oder unter Berücksichtigung der Beziehungen (68)

$$(72) \qquad \frac{1}{f_1 \cdot \nu_1} + \frac{1}{f_2 \cdot \nu_2} \left(\frac{e - f_1}{f_1}\right)^2 = 0 .$$

§ 41. Photographische Farbenkorrektion.

In der photographischen Optik wählt man

$$(73) \qquad \nu = \frac{n_D - 1}{n_{G'} - n_D}$$

und bezeichnet es gewöhnlich mit $\bar{\nu}$ im Gegensatz zu $\nu = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C}$, welch letztere Größe man gewöhnlich der Berechnung von Fernrohren und Mikroskopen zugrunde legt, und die auch in den Produktionsverzeichnissen meist nur angegeben ist. Wir verstehen in folgendem jedoch unter ν immer die durch Gleichung (73) definierte Größe und geben in folgendem eine kleine Tabelle von optischen Daten für die am häufigsten in der photographischen Technik gebrauchten Gläser.

Nr. der Schmelze	Benennung	$\bar{\nu}$	n_D	$n_{G'} - n_D$
0.20	Silikat-Crown mit niedrigem Brechungsexponenten	46.9	1.5019	0.01070
0.114	Soft-Crown	44.3	1.5151	0.01163
0.60	Hard-Crown	47.4	1.5179	0.01092
0.15	Zink-Silikat-Crown	45.6	1.5308	0.01164
0.726	Extra leichtes Flint	36.5	1.5398	0.01479
0.376	Gewöhnliches Leichtflint	32.8	1.5660	0.01726
0.569	Light-Flint	31.6	1.5738	0.01818
0.103	Dense-Flint	27.4	1.6202	0.02262
0.102	Extra Dense-Flint	25.4	1.6489	0.02552

Nr. der Schmelze	Benennung	$\bar{\nu}$	n_D	$n_{G'} - n_D$
0.381	Crown mit hoher Dispersion . .	39.8	1.5262	0.01323
0.1231	Crown mit hoher Dispersion . .	38.5	1.5289	0.01374
0.578	Baryt-Leichtflint	35.8	1.5825	0.01630
0.748	Barytflint	29.6	1.6235	0.02107
0.211	Schweres Barium-Silikat-Crown . .	45.1	1.5726	0.01270
0.202	Schwerstes Barium-Silikat-Crown .	43.2	1.6040	0.01397
0.1209	Schwerstes Barium-Silikat-Crown .	44.8	1.6112	0.01363

§ 42. Achromasie der Brennweite oder Bildgröße.

Wir haben uns bisher darauf beschränkt, für die verschiedenen Farben die Bildpunkte auf der Achse identisch zu machen. Sind nun aber von einem Objekte die Bilder für die verschiedenen Farben zwar in einem Punkte vereinigt, aber von verschiedener Größe, so wird dadurch eine chromatische Störung eintreten. Man muß daher von einem guten optischen Systeme nicht nur verlangen, daß die Bilder für die verschiedenen Farben in einer Ebene zusammenfallen, sondern auch, daß sie für die verschiedenen Farben gleiche Größe h' haben. Wenn wir die Änderung der Bildgröße beim Übergange von gelbem zu violettem Licht mit dh' bezeichnen, so ist die Bedingung dafür, daß die Bilder gleich groß sind:

$$dh' = 0 . \tag{74}$$

Nach den gegebenen Definitionen (vgl. S. 30) ist für das paraxiale Gebiet

$$f = \frac{h'}{u}, \quad \text{also} \quad h' = u \cdot f, \tag{75}$$

wo f die objektseitige Bildweite und u der Winkel ist, unter dem die Strahlen einfallen. (Da wir voraussetzen, daß das System sich in Luft befindet, so fällt objektseitige und bildseitige Brennweite zusammen.) u befindet sich in dem Raume, wo die Lichtstrahlen noch nicht in Farben zerlegt sind, ist also für alle Farben konstant. Durch Differentiation der Gleichung (75) erhalten wir somit

$$dh' = u \cdot df , \tag{76}$$

also mit Rücksicht auf Gleichung (74)

$$df = 0\,. \tag{77}$$

Wenn also ein System für verschiedene Farben gleich große Bilder liefern soll, so müssen die Brennweiten für die verschiedenen Farben zusammenfallen. Man nennt dies Achromasie auf Brennweite oder auf Bildgröße. Alle die Betrachtungen, die wir für die Schnittweiten gemacht haben (vgl. S. 51 bis 55), gelten auch für die Brennweiten.

Es seien uns jetzt zwei Linsen gegeben mit den Brennweiten f_1 und f_2. Ihr Abstand voneinander sei e. Die Gesamtbrennweite dieses Systemes ist dann, wie wir gesehen haben [vgl. Gleichung (52), S. 42,]

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{e}{f_1 \cdot f_2}\,. \tag{78}$$

Durch Differentiation dieser Gleichung finden wir

$$-\frac{1}{f^2}\,df = -\frac{1}{f_1^2}\,df_1 - \frac{1}{f_2^2}\,df_2 + e\left(\frac{1}{f_1}\cdot\frac{1}{f_2^2}\,df_2 + \frac{1}{f_2}\cdot\frac{1}{f_1^2}\,df_1\right). \tag{79}$$

Wenn nun ν_1 und ν_2 die mittleren Dispersionen der Glassorten sind — die wir immer aus den Katalogen entnehmen können —, so ist nach Gleichung (65a) und (65b) S. 56 in Verbindung mit den Gleichungen (68) S. 57:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{df_1}{f_1^2} &= -\frac{1}{\nu_1 f_1}\,, \\ \frac{df_2}{f_2^2} &= -\frac{1}{\nu_2 f_2}\,, \end{aligned}\right. \tag{80}$$

und Gleichung (79) geht somit über in

$$-\frac{1}{f^2}\,df = \frac{1}{\nu_1 f_1} + \frac{1}{\nu_2 f_2} - e\left(\frac{1}{f_1}\cdot\frac{1}{\nu_2 f_2} + \frac{1}{f_2}\cdot\frac{1}{\nu_1 f_1}\right). \tag{81}$$

Sollen nun die Brennweiten achromatisch sein, so muß [vgl. Gleichung (77), S. 59] sein:

$$df = 0\,.$$

Also erhalten wir die Gleichung, wenn wir gleich mit $\nu_1 \nu_2 f_1 f_2$ multiplizieren,

$$0 = \nu_2 f_2 + \nu_1 f_1 - e(\nu_1 + \nu_2)$$

oder

$$e = \frac{\nu_2 f_2 + \nu_1 f_1}{\nu_1 + \nu_2}. \tag{82}$$

In diese Entfernung e müssen also unsere beiden Linsen gebracht werden, damit sie achromatisch sind in bezug auf die Brennweiten, d. h. damit gelbes und violettes Bild gleich groß sind.

Diese Formel gilt natürlich auch, wenn die beiden Linsen aus derselben Glassorte bestehen. Dann wird $\nu_1 = \nu_2$, also

$$e = \frac{f_1 + f_2}{2}. \tag{83}$$

Diese Formel war schon den älteren Optikern bekannt.

Kapitel 5.

Das Seidelsche Gebiet und die Petzval-Bedingung.

§ 43. Die Seidelschen Fehlergleichungen.

Wir haben schon oben § 8 bemerkt, daß, wenn man bei den Strahlenneigungen zur Achse erst vierte und höhere Potenzen vernachlässigt, sich der Abbildungsprozeß noch vollständig mathematisch durch die von Seidel 1855 und 1856 und später auch von anderen Autoren entwickelten Formeln übersehen läßt. Seidel hat nämlich diejenigen „Korrektionsglieder" berechnet, welche zu den Gaußschen Bestimmungsstücken hinzugefügt werden müssen, damit außer den Paraxialstrahlen noch diejenigen schief verlaufenden Strahlen berücksichtigt werden, deren Strahlenneigungen der obigen Voraussetzung entsprechen. Die Formeln für diese Korrektionsglieder setzen sich zusammen aus fünf nicht identischen Summen derart, daß, wenn diese fünf Größen einzeln der Null gleich werden, die Seidelsche Abbildung in die Gaußsche übergeht, d. h. daß ein achsensenkrechtes Objekt ein scharfes, ebenes und winkelgetreues Bild erzeugt. In diesem Sinne kann man die genannten fünf Größen, die man mit S_1 bis S_5 bezeichnet, als die durch die Seidelschen Strahlen erzeugten Fehler ansehen.

Da wir später das allgemeine Problem der Bilderzeugung von viel allgemeineren Gesichtspunkten aus behandeln werden, als es durch die Seidelsche Darstellung geschieht, so beschränken wir uns hier auf einen kurzen Hinweis betreffs der Bedeutung der Größen S.

$S_1 = 0$ bedeutet, daß die sphärische Aberration aufgehoben ist, d. h. daß alle von einem auf der Achse gelegenen Objektpunkte ausgehenden Strahlen sich im Bildraume streng in einem Punkte schneiden. Ist außer S_1 auch $S_2 = 0$, so bedeutet dies, daß auch für Punkte, die der Achse unendlich nahe sind, also nicht auf der Achse

selbst liegen, die sphärische Aberration im Hauptschnitte aufgehoben ist (Sinusbedingung). In diesem Falle bilden also die im Hauptschnitte verlaufenden Strahlen nach der Brechung nicht wie im allgemeinen Falle eine Brennlinie (Coma), sondern schneiden sich streng in einem Punkte. Man sagt, daß in diesem Falle Comafreiheit herrsche (Fraunhofersche Bedingung).

Die nicht im Hauptschnitte verlaufenden Strahlen, insbesondere die in Ebenen verlaufenden, welche senkrecht zum Hauptschnitte sind (die sogenannten Sagittalstrahlen), schneiden sich jedoch bei seitlich gelegenem Objektpunkte jetzt noch nicht notwendig in dem in bezug auf die im Hauptschnitte verlaufenden Strahlen aberrationsfreien Punkte, d. h. es ist noch Astigmatismus vorhanden, dessen Aufhebung durch das Hinzukommen der Bedingung $S_3 = 0$ garantiert ist.

Ist nun aber auch der Astigmatismus aufgehoben, so liegt das Bild im allgemeinen noch auf einer krummen Fläche, die sich jedoch in eine Ebene verwandelt, wenn $S_4 = 0$ ist (Petzvalsche Bedingung).

Schließlich ist $S_5 = 0$ die Bedingung dafür, daß das Bild dem Objekte winkelgetreu ist (Bedingung für die Orthoskopie).

Die Seidelschen Größen S enthalten außer den Konstanten des Systemes auch noch die Entfernungen des Objektes und Bildes von den Systemflächen, d. h. daß das Nullwerden der sämtlichen Größen S immer nur erst die Garantie liefert, daß für ein bestimmtes konjugiertes Ebenenpaar kollineare Abbildung stattfindet. Die Bedingung dafür, daß eine derartige vollkommene Abbildung auch noch in der Nähe des betrachteten Ebenenpaares stattfindet, heißt die Herschelsche und wird später allgemein entwickelt werden.

Wie schon erwähnt, bilden die seitlich auffallenden Strahlen bei den modernen photographischen Systemen derartige starke Neigungen zu der Achse, daß die Voraussetzungen nicht mehr zutreffend sind, unter denen die Seidelschen Bedingungen abgeleitet sind. Nur die Petzvalsche Bedingung macht hiervon eine Ausnahme und hat sich als hervorragend wichtig für die Konstruktion photographischer Systeme erwiesen, so daß wir uns mit ihr genauer beschäftigen müssen.

Außerdem geben wir hier noch die Formeln für die sphärische Aberration einer sehr dünnen Linse, weil wir ihrer bei der Durchführung einiger einfacher Beispiele später bedürfen werden.

§ 44. Sphärische Aberration im Seidelschen Gebiete.

Sei auf einer optischen Achse bei S eine dünne Linse aufgestellt (Fig. 23) und werde der Punkt P durch Paraxialstrahlen in P' abgebildet. Betrachten wir ferner einen von P ausgehenden Seidelschen Strahl, für den also erst die vierten Potenzen der Neigung zur Achse vernachlässigt werden, so schneidet dieser die Achse nicht genau in P', sondern in einem benachbarten Punkte L'. Die kleine Strecke $L'P'$ bezeichnen wir mit S_1 und nennen sie „sphärische Aberration". Die Größe S_1 wird von der Einfallshöhe $AS = h$ abhängen, und man hat:*)

Fig. 23.

$$(84)\quad S_1 = -\frac{n b^2 h^2}{2(n-1)^2}\left[\left(\frac{n}{a}+\frac{1}{\varkappa}\right)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\varkappa}\right)^2+\left(\frac{n}{b}-\frac{1}{\varkappa}\right)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{\varkappa}\right)^2\right]$$

In dieser Gleichung, die zuerst von Euler gegeben ist, bedeuten a und b wie in § 27 die Schnittweiten vor und nach der Brechung für Paraxialstrahlen, d. h. es ist in Figur 23

$$PS = a\,, \qquad P'S = b\,.$$

Die Größe $\varkappa$ ist die Schnittweite nach der Brechung an der ersten Fläche. Die Radien r_1 und r_2 der Linse hängen mit den Größen $a, b, \varkappa$ also durch die Gleichungen:

$$(85)\qquad \frac{n-1}{r_1} = \frac{1}{a} + \frac{n}{\varkappa}\,,$$

$$(86)\qquad -\frac{n-1}{r_2} = \frac{1}{b} - \frac{n}{\varkappa}\,,$$

zusammen, durch deren Addition noch die bekannte Beziehung entsteht:

$$(87)\qquad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right),$$

wo n der Brechungsexponent und f die Brennweite der Linse bedeutet.

Durch Einführung der Brennweite f kann man der Gleichung (84) folgende Form geben:

$$(88)\quad S_1 = -\frac{n b^2 h^2}{2(n-1)^2 f}\left[n\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{ab}+\frac{1}{b^2}\right)-\frac{2n+1}{\varkappa}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)+\frac{n+2}{\varkappa^2}\right].$$

---

*) Vgl. Klügel, Analyt. Dioptrik. Leipzig 1778. S. 64.

Soll die sphärische Aberration gehoben, d. h. $S_1 = 0$ sein, so muß in Gleichung (88) die eckige Klammer verschwinden. Schreibt man diese Bedingung auf und berechnet daraus $\frac{1}{\varkappa}$, so erhält man:

$$(89)\quad \frac{1}{\varkappa}=\frac{2n+1}{2(n+2)}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\pm\sqrt{\left[\frac{(2n+1)^2}{4(n+2)^2}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)^2-\frac{n}{n+2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{ab}+\frac{1}{b^2}\right)\right]}$$

Die Größe unter dem Wurzelzeichen kann man schreiben:

$$(90)\qquad -\frac{(4n-1)}{4(n+2)^2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)-\frac{4n^2+2}{4(n+2)^2}\cdot\frac{1}{ab}\,.$$

Aus dieser Form erhellt sofort, daß, wenn a und b dasselbe Vorzeichen haben, d. h. Objekt und Bild auf verschiedenen Seiten der Linse liegen, alsdann keine vollständige Vernichtung der Aberration möglich ist, indem der obige Ausdruck negativ, $\varkappa$ also imaginär ist. Eine dünne Linse als photographisches Objektiv benützt, zeigt also sphärische Aberration, deren Größe man aus den obigen Formeln leicht berechnen kann.*)

Dagegen kann S_1 verschwinden, wenn a und b verschiedene Vorzeichen haben, d. h. wenn Objekt und Bild auf derselben Seite der Linse liegen. Setzt man z. B. in (90) für n den Wert 1,5, läßt den gemeinschaftlichen Faktor beider Summanden weg und multipliziert mit b^2, so ist die Bedingung dafür, daß $\varkappa$ sich reell ergibt, dadurch bestimmt, daß $-5\left(\frac{b^2}{a^2}+1\right)-11\frac{b}{a}$ positiv oder $\frac{b^2}{a^2}+\frac{11}{5}\frac{b}{a}+1$ negativ ist. Nach der Theorie der algebraischen Gleichungen ist dies nur dann möglich, wenn $\frac{b}{a}$ zwischen die Wurzeln der Gleichung $\frac{b^2}{a^2}+\frac{11}{5}\frac{b}{a}+1=0$, d. h. zwischen $\frac{-11+\sqrt{21}}{10}$ und $\frac{-11-\sqrt{21}}{10}$ fällt. Es muß also $-b$ zwischen $0{,}642\,a$ und $2{,}558\,a$ fallen, wenn die sphärische Aberration gehoben sein soll. Wenn wir eine einfache Landschaftslinse also auch nicht in bezug auf den Bildort (die Mattscheibe) sphärisch korrigieren können, so ist dies doch häufig möglich für die Mittelpunkte der Eintritts- und Austrittspupille.

*) Für $a=\infty$ wird S_1 ein Minimum, wenn das Radienverhältnis $-\frac{r_1}{r_2}=\frac{4+n-2n^2}{n(2n+1)}$ ist, woraus für $n=1{,}5$ folgt: $-\frac{r_1}{r_2}=6$.

§ 45. Die Petzval-Bedingung.

In der Figur 24 sei ein Hauptschnitt (Papierebene) einer brechenden Kugelfläche CSB mit dem Mittelpunkte M dargestellt. Das Objekt sei jetzt nicht, wie früher vorausgesetzt, in einer zur optischen Achse PMP' senkrechten Ebene gelegen, sondern befinde sich auf einer Kugelfläche, deren Mittelpunkt A und deren Scheitel P sei. Vom

Fig. 24.

Punkte P werde mittels Paraxialstrahlen das Bild P' erzeugt; sei ferner Q ein Punkt der Kugelfläche, auf der sich das Objekt befindet, und zieht man eine Gerade QM — eine sogenannte sekundäre Achse —, so wird sich das Bild Q' des Objektpunktes Q auf der Verlängerung dieser Achse befinden.

Setzt man $QM = s$ und $Q'M = s'$, so ist gemäß Gleichung (10) Seite 15:

$$\frac{n'}{s} + \frac{n}{s'} = \frac{n' - n}{r}, \tag{91}$$

wo r der Radius der brechenden Kugelfläche ist und n und n' die Brechungsexponenten zu beiden Seiten derselben sind.

Man kann übrigens bemerken, daß P' und Q' auch dann noch als Bilder der Punkte P und Q aufgefaßt werden können, wenn wir die Voraussetzung des paraxialen Strahlenganges fallen lassen. P' und Q' sind dann die Spitzen der von P und Q erzeugten kaustischen Kurven im Hauptschnitte und als solche als Bilder von P und Q anzusehen. Unter der Annahme, daß die Winkel

$$\sphericalangle PMQ = P'MQ' = \vartheta$$

klein sind, werden wir auch die sämtlichen Bildpunkte als auf einer Kugel mit dem Mittelpunkte A' liegend betrachten können.

Wir setzen noch

$$PA = QA = \varrho\,, \qquad P'A' = Q'A' = \varrho'\,,$$
$$AM = a\,, \qquad A'M = a'\,.$$

Gemäß Figur 24 besteht nun die Beziehung

$$\frac{n'}{PM} + \frac{n}{P'M} = \frac{n'-n}{r}$$

oder

$$\frac{n'}{a+\varrho} + \frac{n}{a'+\varrho'} = \frac{n'-n}{r}. \tag{92}$$

Aus den Gleichungen (91) und (92) folgt durch Subtraktion:

$$n'\left(\frac{1}{a+\varrho} - \frac{1}{s}\right) = -n\left(\frac{1}{a'+\varrho'} - \frac{1}{s'}\right). \tag{93}$$

Nun hat man nach dem Kosinussatze der Trigonometrie aus dem Dreiecke MAQ:

$$\varrho^2 = s^2 + a^2 - 2as\cos\vartheta. \tag{94}$$

Setzen wir den Winkel ϑ so klein voraus, daß wir die Abbildung im Seidelschen Gebiete haben, so ist (vgl. § 8):

$$\cos\vartheta = 1 - \frac{\vartheta^2}{2},$$

und Gleichung (94) wird

$$\varrho^2 = (s-a)^2 + as\vartheta^2,$$

woraus:

$$\frac{\varrho}{s-a} = \sqrt{1 + \frac{as\vartheta^2}{(s-a)^2}}$$

folgt. Entwickeln wir die rechte Seite nach dem binomischen Lehrsatz unter Vernachlässigung aller Potenzen von ϑ, die höher sind als die zweite, so findet man

$$\frac{\varrho}{s-a} = 1 + \frac{1}{2}\frac{as\vartheta^2}{(s-a)^2}$$

oder, wenn man mit $s-a$ multipliziert:

$$a + \varrho = s + \frac{1}{2}\frac{as\vartheta^2}{s-a}.$$

Hieraus folgt leicht:

$$\frac{s}{a+\varrho} = \frac{1}{1 + \frac{a\vartheta^2}{2(s-a)}} = 1 - \frac{a\vartheta^2}{2(s-a)},$$

und endlich:

$$\frac{1}{a+\varrho} - \frac{1}{s} = -\frac{a\vartheta^2}{2s(s-a)}. \tag{95}$$

Durch die analogen mathematischen Operationen im Bildraume hätte man erhalten:

$$\frac{1}{a'+\varrho'} - \frac{1}{s'} = -\frac{a'\vartheta^2}{2s'(s'-a')}. \tag{96}$$

Setzt man die Werte der linken Seite aus (95) und (96) in (93) ein, so wird, da die Größe ϑ^2 herausfällt:

$$\frac{a n'}{s(s-a)} = -\frac{a' n}{s'(s'-a')}. \tag{97}$$

Die Beziehung (97) ist unabhängig von ϑ, muß also für jede beliebige Neigung innerhalb des Seidelschen Gebietes, also auch für Paraxialstrahlen gelten. Machen wir für einen Augenblick diese letztere Annahme, so ist, wie ein Blick auf die Figur 24 lehrt:

$$s = a + \varrho, \quad s' = a' + \varrho',$$

und Gleichung (97) wird:

$$n'\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{s}\right) = -n\left(\frac{1}{\varrho'} - \frac{1}{s'}\right)$$

oder

$$\frac{n'}{\varrho} + \frac{n}{\varrho'} = \frac{n'}{s} + \frac{n}{s'},$$

und schließlich unter Berücksichtigung von Gleichung (91):

$$\frac{n'}{\varrho} + \frac{n}{\varrho'} = \frac{n'-n}{r}. \tag{98}$$

Die Gleichung (98) liefert in einfachster Weise den Radius ϱ' der Kugel, auf der sich das Bild befindet, wenn der Krümmungsradius ϱ des Objektes gegeben ist.

Der Einfachheit der Entwicklung halber haben wir unsere Betrachtungen an den Fall angeknüpft, daß die Krümmungskugel des Bildes dem ankommenden Lichte die hohle Seite zuwendet und haben ihren Radius für diesen Fall positiv gesetzt. Um uns mit der von uns früher festgesetzten Vorzeichenbestimmung für die Krümmung einer Kugel in Einklang zu setzen (S. 23), müssen wir dem Radius ϱ' das negative Vorzeichen geben. Gleichung (98) wird dann:

$$\frac{n'}{\varrho} - \frac{n}{\varrho'} = \frac{n'-n}{r} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{n\varrho} - \frac{1}{n'\varrho'} = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n'}\right). \tag{99}$$

Nehmen wir an, daß das Bild mit dem Radius ϱ' wieder als Objekt für eine zweite Brechung diene usw., so können wir unsere

Betrachtungen sofort auf ein System beliebig vieler zentrierter Flächen ausdehnen.

Bezeichnen wir die auf die verschiedenen Brechungen bezüglichen Größen mit den entsprechenden Indizes, so wird z. B. für drei brechende Flächen:

$$(100)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{n_1 \varrho_1} - \dfrac{1}{n_1' \varrho_1'} = \dfrac{1}{r_1}\left(\dfrac{1}{n_1} - \dfrac{1}{n_1'}\right), \\ \dfrac{1}{n_2 \varrho_2} - \dfrac{1}{n_2' \varrho_2'} = \dfrac{1}{r_2}\left(\dfrac{1}{n_2} - \dfrac{1}{n_2'}\right), \\ \dfrac{1}{n_3 \varrho_3} - \dfrac{1}{n_3' \varrho_3'} = \dfrac{1}{r_3}\left(\dfrac{1}{n_3} - \dfrac{1}{n_3'}\right). \end{cases}$$

Beachtet man die hier gültigen Beziehungen:

$$n_1' = n_2\,, \quad n_2' = n_3 \quad \text{usw.}$$

und

$$\varrho_1' = \varrho_2\,, \quad \varrho_2' = \varrho_3 \quad \text{usw.},$$

so erhält man durch Addition der Gleichungen (100)

$$(101)\qquad \frac{1}{n_1 \varrho_1} - \frac{1}{n_3' \varrho_3'} = \sum \frac{1}{r}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n'}\right)$$

eine Formel, die entsprechend für beliebig viele Brechungen gilt.

Für den Fall zweier Brechungen unter der Voraussetzung, daß das erste und letzte Medium denselben Brechungsexponenten $n_1 = n_2' = 1$ habe, muß Gleichung (101) für die Brechung durch eine beliebig dicke Linse gelten. Den Brechungsexponenten des Linsenmediums $n_1' = n_2$ wollen wir jetzt mit n bezeichnen. Dann liefert (101), auf zwei Brechungen angewandt, sofort, wenn wir noch, da eine Verwechslung ausgeschlossen erscheint, ϱ_1 durch ϱ und ϱ_2' durch ϱ' ersetzen:

$$\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho'} = \frac{1}{r_1}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{r_2}\left(\frac{1}{n} - 1\right)$$

oder

$$(102)\qquad n\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho'}\right) = \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \cdot (n-1)\,.$$

Die Größe auf der rechten Seite ist die reziproke Brennweite der Linse, wenn wir die Dicke vernachlässigen würden. Wir wollen diese Größe, wie früher, mit $\dfrac{1}{f}$ bezeichnen und sie die „Pseudobrennweite" nennen, indem wir beachten, daß sie mit der wahren

Brennweite der hier in Frage kommenden Linse von beliebiger Dicke durchaus nicht identisch ist.

Gleichung (102) liefert nun:

$$\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho'} = \frac{1}{nf}. \tag{103}$$

Sind λ Linsen von beliebiger Dicke auf einer Achse zentriert mit den Pseudobrennweiten: $f_1, f_2, \ldots f_\lambda$, so liefert Gleichung (103) sukzessive

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{\varrho_1} - \dfrac{1}{\varrho_1'} = \dfrac{1}{n_1 f_1}, \\ \dfrac{1}{\varrho_2} - \dfrac{1}{\varrho_2'} = \dfrac{1}{n_2 f_2}, \\ \qquad\vdots \\ \dfrac{1}{\varrho_\lambda} - \dfrac{1}{\varrho_\lambda'} = \dfrac{1}{n_\lambda f_\lambda}. \end{array}\right. \tag{104}$$

Berücksichtigt man:

$$\varrho_1' = \varrho_2, \quad \varrho_2' = \varrho_3 \quad \text{usw.},$$

so liefert die Addition der Gleichungen (104)

$$\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_\lambda'} = \frac{1}{n_1 f_1} + \frac{1}{n_2 f_2} + \ldots \frac{1}{n_\lambda f_\lambda} = \sum_{k=1}^{k=\lambda} \frac{1}{n_k f_k}. \tag{105}$$

Dies ist die berühmte Petzvalsche Formel.

Sie drückt in einfachster Weise den Krümmungsradius ϱ_λ' des definitiven Bildes durch die Pseudobrennweiten der einzelnen Linsen des Systemes aus.

§ 46. Historische Notizen zur Petzvalformel.

Um einen Überblick über die Geschichte dieser Formel zu geben, mögen folgende Notizen dienen.

Petzval veröffentlichte in seinem „Bericht über die Ergebnisse einiger dioptrischer Untersuchungen“ Pesth 1843, folgenden Satz:

Unter Voraussetzung eines planen, achsensenkrechten Objektes ist der reziproke Wert des Krümmungshalbmessers ϱ_λ' des Bildes am Scheitel gleich der Summe der Produkte aus den reziproken Werten der Brennweiten $1/f_k$ in die reziproken Werte der Brechungsexponenten $1/n_k$ der einzelnen Bestandlinsen.

Unter der Voraussetzung von λ Linsen hat man also hiernach:

$$\frac{1}{\varrho_\lambda'} = \sum_{k=1}^{k=\lambda} \frac{1}{n_k f_k}.$$

Dabei wird definiert

$$\frac{1}{f_k} = (n_k - 1)\left(\frac{1}{r_k} - \frac{1}{r_k'}\right),$$

wenn r_k und r_k' vorderer und hinterer Radius der k^{ten} Linse ist. Dieser Satz ist bis auf die Wahl des Vorzeichens von ϱ_λ' identisch mit unserer Formel (105), wenn man ein ebenes Objekt voraussetzt, ϱ_1 also gleich ∞ setzt.

Da Petzval keinen Beweis für seinen Satz gab, so konnte es fraglich sein, ob das Theorem allgemein gültig ist, oder ob es sich nur auf ein System unendlich dünner, im Kontakt befindlicher Linsen bezog.

Zwanzig Jahre später als Petzval behandelte Zinken-Sommer das Problem der Bildkrümmung.*) Ausgehend von der Brechung an einer Fläche machte er die Annahme, daß alle Achsen der die Abbildung vermittelnden Bündel sowohl im Objektraume wie im Bildraume durch je einen bestimmten Punkt der optischen Achse gehen sollten; im Sinne der Abbeschen Theorie der Strahlenbegrenzung würde man sagen, daß die Bündelachsen die Mittelpunkte der Ein- und Austrittspupille passieren müssen. Unter diesen Voraussetzungen zerfällt jedes als unendlich dünn angenommene Bündel in einen sagittalen und in einen meridionalen Teil; es gibt demnach zwei „astigmatische Rotationsbildflächen“ und dementsprechend zwei Krümmungsradien am Scheitel.

Durch Summation über alle vorhandenen brechenden Flächen ergibt sich die Differenz der reziproken Krümmungsradien im Bildraume und im Objektraume. Besonders elegant werden die Ausdrücke durch Einführung der optischen Invarianten.**)

Sind für irgend eine beliebige brechende Fläche a und a' die axialen Schnittweiten des Bild- und Objektpunktes für Paraxial-

*) H. Zinken-Sommer, Pogg. Ann. **122**. S. 563. 1864 und ferner: Untersuchungen über die Dioptrik der Linsensysteme. Braunschweig 1870. S. 51.

**) Vgl. S. Czapski, Theorie der optischen Instrumente nach Abbe. Breslau 1893.

strahlen, m und m' die analogen Größen für die Kreuzungspunkte der Hauptachsen, so sind die entsprechenden Invarianten:

$$Q_a = n\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{a}\right) = n'\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a'}\right),$$

$$Q_m = n\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{m}\right) = n'\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{m'}\right), \tag{105a}$$

wo r der Radius der in Frage kommenden Fläche und n und n' die Brechungsexponenten links und rechts von dieser Fläche sind.

Nennt man nun ϱ_1, wie vorher, den Krümmungsradius des Objektes und ϱ_λ^σ und ϱ_λ^τ die Krümmungsradien des sagittalen und meridionalen Bildes nach der Brechung durch λ Flächen, so werden die Formeln von Zinken-Sommer für die sagittale Bildfläche

$$\frac{1}{n_\lambda' \varrho^\sigma} - \frac{1}{n_1 \varrho_1} = A - B \tag{106}$$

und für die meridionale Bildfläche

$$\frac{1}{n_\lambda' \varrho_\lambda^\tau} - \frac{1}{n_1 \varrho_1} = A - 3B, \tag{107}$$

wo $A = \sum \frac{1}{r}\left(\frac{1}{n'} - \frac{1}{n}\right)$ und $B = \sum \left(\frac{Q_m}{Q_m - Q_a}\right)^3 \left(\frac{1}{n'a'} + \frac{1}{na}\right)$ *)

ist. Aus (106) und (107) lassen sich die Scheitelkrümmungen der beiden astigmatischen Bildflächen berechnen. Sollen diese Radien für ein ebenes Objekt selbst unendlich werden, so muß $A = 0$ und $B = 0$ sein.

Der Ausdruck für A ist aber, wie ein Blick auf Gleichung (101) lehrt, nichts weiter als der reziproke Krümmungsradius des Bildes gemäß dem Petzvalschen Satze; hiernach ist also zur Erzielung der Bildebenung die Petzvalbedingung für ein beliebiges System zwar notwendig, aber nicht hinreichend. Dies ist im wesentlichen die bis vor kurzem über den Petzvalschen Satz herrschende Ansicht gewesen. Noch radikaler urteilt Zinken-Sommer, indem die Petzvalbedingung nach seiner Ansicht nur dann einen Sinn hätte, wenn sämtliche Kugelflächen des brechenden Systemes einen gemeinsamen Mittelpunkt haben, durch welchen die Bündelachsen sämtlich hindurchgehen. Für diesen Fall werden in der Tat in Gleichung (105a) die Größen m und m' dem Radius r gleich, und zwar würde dies Verhalten für alle Flächen eintreten, so daß also $Q_m = 0$ für alle Brechungen statt hat. Demzufolge wäre dann auch $B = 0$, und man gelangte auf diese Weise

*) Czapski l. c.

zur Petzvalbedingung $A = 0$ zurück. Eine theoretisch gesicherte Stellung konnte auf diese Weise das Petzvalsche Theorem nicht erlangen; es wurde nur gestützt durch die Autorität Petzvals selbst, der es als allgemein gültig bezeichnete. Allerdings wiesen verschiedene Forscher auf die praktische Bedeutung des Theorems hin, wie z. B. Dr. Hugo Schröder und v. Hoegh, und es ist auch mehrmals Gegenstand von Patentanmeldungen geworden, wie z. B. durch den englischen Optiker Taylor und in allerneuester Zeit durch Steinheil in München. In der Tat erfüllen die meisten modernen photographischen Objektive mit anastigmatischer Bildwölbung die Petzvalbedingung sehr nahe, und in Verbindung mit der Bedingung für die Achromasie wird man durch sie, wie wir unten noch ausführen werden, auf ein Crownglas hingewiesen, dessen Brechungsexponent höher ist als der des kompensierenden Flintglases. In der Tat findet dieses hochbrechende Crown, das zu Petzvals Zeit noch unbekannt war, jetzt in vielen modernen Objektivkonstruktionen Verwendung. Allerdings werden wir S. 77 beweisen, daß der Schluß, daß die Petzvalbedingung und die Forderung der Achromasie gleichzeitig nur durch Verwendung der neuen Gläser zu erfüllen seien, voreilig ist.

Die verschiedenartige Beurteilung, welche unser Theorem in der Literatur erfahren, hängt offenbar damit zusammen, daß man es seit Zinken-Sommer in Zusammenhang bringen wollte mit der Annahme, daß die Achsen der abbildenden Bündel durch vorgeschriebene Achsenpunkte gehen sollen. Dies lag um so näher, als ja in der Tat, wie wir oben sahen, der analytische Ausdruck des Petzvalschen Satzes als Summand in jenen Formeln erschien. Tatsächlich aber ist das Petzvalsche Theorem ein ganz selbständiger Satz und kann volle Allgemeingültigkeit für ein beliebiges zentriertes System beanspruchen. Denkt man sich nämlich innerhalb eines Hauptschnittes von einem achsennahen Objektpunkte auf die erste Fläche eines zentrierten Systemes mit weiter Öffnung unendlich viele Strahlen fallen, so werden diese nach der ersten Brechung eine Brennlinie mit einer Spitze bilden, d. h. mit einem Punkte, in welchem die Strahlenvereinigung von einem höheren Grade ist wie in den übrigen Punkten der Linie. Durch die Brechung dieses Strahlensystemes an der zweiten Fläche werden sich zwar alle Maßbeziehungen ändern, aber die Eigentümlichkeit, eine Spitze zu bilden, wird erhalten bleiben. Auf diese Weise entsteht, selbst nach beliebig vielen Brechungen, im Bildraume eine kaustische Spitze, welche als auffangbares Bild des in Frage kommenden Objektpunktes angesehen werden muß. Vorausgesetzt ist hierbei natürlich, daß das System den nötigen Spielraum zur Bildung einer

kaustischen Spitze gestattet und nicht durch zu kleine Blenden eingeengt ist. Denken wir uns als Objekt eine Rotationsfläche zur optischen Achse, die wir uns im Scheitel durch die Krümmungskugel ersetzt denken, so liefern unsere obigen Betrachtungen den Krümmungsradius des Bildes gemäß Gleichung (105) in der Hauptebene. Dieses Bild ist nichts anderes als der Inbegriff der kaustischen Spitzen in der Nähe der optischen Achse. Hierin liegt die allgemeine und weittragende Bedeutung des Petzvalschen Satzes.

Mit der Zinken-Sommerschen Problemstellung hat dieser Satz direkt gar keine Beziehung; denn hier ist eine punktweise Abbildung (mittels kaustischer Spitzen) bei freier Öffnung, dort die zwangsweise Passage durch (wenigstens theoretisch) unendlich enge Blendenöffnungen vorausgesetzt, wobei die Bilderzeugung mittels Strahlenvereinigungen geringer Grade unter astigmatischen Deformationen vor sich geht. Welcher von beiden Gesichtspunkten bei einem speziellen optischen Problem zu vertreten ist, ergibt sich aus dem Zwecke, welchem das betreffende Instrument dienen soll. Bei weitgeöffneten Objektiven muß die Petzvalsche, bei photographischen Weitwinkeln und Okularen z. B. die Zinken-Sommersche Anschauung Platz greifen.

Anmerkung: Wir wollen dies gegensätzliche Verhalten noch an dem einfachen Beispiele des Hohlspiegels näher ausführen. Die bloße Anschauung läßt hier erkennen, daß, wenn keine Blendung vorhanden ist, das Bild eines sehr entfernten ebenen Objektes sich auf einer Kugel vom Radius $r/2$ (Spiegelradius gleich r) befindet; dies entspricht der Petzvalschen Formel. Befindet sich nun im Abstande m' vom Spiegel auf der Achse die Pupille eines Auges, welches das reelle Bild betrachtet, so ist damit ein gezwungener Strahlengang geschaffen, indem die Augenpupille zugleich als Austrittspupille des Systemes wirkt. Hier treten also die Zinken-Sommerschen Formeln in Kraft. Für die Reflexion hat man bekanntlich $n' = -n$ zu setzen und findet aus den Formeln (105a), (106) und (107)

$$A = -\frac{2}{n r}, \qquad Q_m = -n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{m'}\right), \qquad Q_a = \frac{n}{r},$$

$$B = \left(\frac{m' - r}{2m' - r}\right)^3 \frac{2}{n r}.$$

Unter Voraussetzung eines ebenen Objektes wird demnach der Krümmungsradius ϱ^σ des sagittalen Bildes bestimmt durch:

$$\frac{1}{\varrho^\sigma} = \frac{2}{r} + \left(\frac{m' - r}{2m' - r}\right)^3 \frac{2}{r}$$

und der des meridionalen Bildes durch:

$$\frac{1}{\varrho^\tau} = \frac{2}{r} + 3 \cdot \left(\frac{m' - r}{2m' - r}\right)^3 \frac{2}{r}.$$

§ 47. Die Petzvalsche Gleichung und die Achromasie.

Betrachten wir zunächst ein System zweier dünner, im Kontakt befindlicher Linsen von den Brennweiten f_1 und f_2, den Brechungsexponenten n_1 und n_2 und den mittleren Dispersionen ν_1 und ν_2, so ist die Bedingung für die Achromasie

$$\frac{1}{\nu_1 f_1} + \frac{1}{\nu_2 f_2} = 0 . \tag{108}$$

Die Petzvalsche Gleichung wird unter der Bedingung, daß die Krümmungsradien von Objekt und Bild unendlich groß sind:

$$\frac{1}{n_1 f_1} + \frac{1}{n_2 f_2} = 0 . \tag{109}$$

Aus den beiden letzten Beziehungen folgt:

$$-\frac{f_2}{f_1} = \frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{n_1}{n_2} . \tag{110}$$

Es müssen sich also, wenn man die Dicken und Entfernungen der Linsen vernachlässigt, die Brechungsexponenten der zur Herbeiführung der Achromasie benutzten Gläser wie deren mittlere Dispersionen verhalten.

Die sogenannten alten Gläser, welche bis vor etwa 20 Jahren den Optikern lediglich zur Verfügung standen, konnten die Bedingung nicht erfüllen; denn die Crowngläser (mit großem ν) hatten kleine und die Flintgläser (mit kleinem ν) große Brechungsexponenten.

In der neueren Zeit ist es jedoch der Glasschmelzerei von Schott u. Gen. gelungen, Gläser herzustellen, die der Gleichung (110) wenigstens annähernd genügen. Insbesondere zeigen einige neue Barium-Crowngläser die Eigenschaft, bei relativ großem ν auch hohe Brechungsexponenten zu besitzen. (Siehe die Schmelzen 0.202 und 0.1209 auf S. 59.)

Dem entspricht auch die Tatsache, daß die meisten modernen Objektive mit geebnetem Bildfelde Barium-Crownglas mit hohem Brechungsexponenten enthalten. Derartige Kombinationen nennt man „Neuachromate" im Gegensatz zu den früher üblichen Achromaten (Altachromate).

Wir wollen jetzt eine Kombination von zwei dünnen Linsen betrachten, die sich in einem endlichen Abstande e voneinander befinden, und stellen folgende drei Forderungen auf.

Erstens soll das System eine vorgeschriebene Brennweite F haben dann muß sein [gemäß Gleichung (52) auf S. 42]

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{e}{f_1 f_2}. \tag{111}$$

Zweitens soll das System für ein unendlich fernes Objekt achromatisch sein, wofür die Bedingung ist [gemäß Gleichung (72) auf S. 58]

$$\frac{1}{f_1 \nu_1} + \frac{1}{f_2 \nu_2}\left(\frac{e - f_1}{f_1}\right)^2 = 0. \tag{112}$$

Drittens wollen wir annehmen, daß die Kombination unter Voraussetzung eines ebenen Objektes ein Bild erzeugt, dessen Krümmungsradius ϱ' ist, dann liefert Gleichung (105) auf S. 70, wenn man sie auf zwei Linsen anwendet,

$$-\frac{1}{\varrho'} = \frac{1}{n_1 f_1} + \frac{1}{n_2 f_2}. \tag{113}$$

Würden wir die Forderung stellen, daß auch $\varrho' = \infty$, das Bild also eben sein soll, so lieferte Gleichung (113)

$$0 = \frac{1}{n_1 f_1} + \frac{1}{n_2 f_2}. \tag{114}$$

Die drei Gleichungen (111), (112), (114) würden dann, wenn man n_1, n_2, ν_1, ν_2 festgelegt hätte, die drei Größen e, f_1, f_2 bestimmen, so daß es also — theoretisch wenigstens — möglich ist, unter Verwendung zweier beliebiger Glassorten, stets eine Kombination zweier Linsen anzugeben, die sowohl der Bedingung für die Achromasie als auch der Petzvalschen Bedingung genügt.

§ 48. Fall, daß die Brechungsexponenten der beiden Linsen einander gleich sind.

Als speziellen Fall wählen wir zwei Glassorten, deren Kombination gewissermaßen auf der Grenze zwischen einem Altachromaten und einem Neuachromaten steht, bei denen nämlich die Brechungsexponenten einander gleich sind. Setzen wir $n_1 = n_2$, so liefert Gleichung (114)

$$f_1 = -f_2,$$

und Gleichung (111) gibt:

$$F = \frac{f_1^2}{e}, \tag{115}$$

und aus Gleichung (112) folgt:

$$f_1 = -f_2 = \frac{e}{1 \pm \sqrt{\frac{\nu_2}{\nu_1}}}.$$

Unter Berücksichtigung von Gleichung (115) folgt hieraus:

$$(116) \qquad f_1 = -f_2 = F\left(1 \pm \sqrt{\frac{\nu_2}{\nu_1}}\right)$$

und

$$(117) \qquad e = \frac{f_1^2}{F},$$

wodurch das System bestimmt ist. Setzen wir z. B.: $\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{9}{16}$, so daß also das Glas (n_2, ν_2) die Rolle des Flintes spielt, so liefert Gleichung (116), wenn man das negative Vorzeichen der Wurzel gelten läßt:

$$(118) \qquad f_1 = \frac{F}{4}, \quad \text{und es wird:} \quad e = \frac{F}{16}.$$

Das positive Vorzeichen in der Gleichung (116) führt zu einer Kombination, die ein virtuelles Bild erzeugt und daher als photographisches Objektiv nicht verwendbar ist.

Die letzten Gleichungen zeigen die wichtige Rolle, welche die Entfernung e der beiden Linsen spielt.

§ 49. Fall verschiedener Brechungsexponenten.

Während die Gleichung (110), welche unter Voraussetzung verschwindender Entfernung e hergeleitet ist, für $n_1 = n_2$ die Beziehung $\nu_1 = \nu_2$ und damit die Unmöglichkeit einer Achromasie ergeben würde, führen die Gleichungen (111), (112), (114) für die Annahme $n_1 = n_2$ auf sehr brauchbare Typen von photographischen Objektiven. Insbesondere lehren diese Gleichungen, daß die Bildebenung im Sinne der Petzvalschen Formeln auch mittels der alten Gläser prinzipiell nicht ausgeschlossen erscheint. Die allgemeine Lösung der Gleichungen (111), (112), (114) ergibt übrigens

$$(118\text{a}) \qquad \begin{cases} f_1 = \dfrac{F(n_1 + n_2 A)}{n_1}, \quad f_2 = -\dfrac{F(n_1 + n_2 A)}{n_2}, \\ e = f_1(1 + A), \end{cases}$$

wo $A = \sqrt{\frac{\nu_2 n_1}{\nu_1 n_2}}$ ist und sowohl mit positivem als mit negativem Vorzeichen in Rechnung gezogen werden kann.

§ 50. Berechnung einer Aplanatenhälfte nach Harting.

Wie schon erwähnt, würde selbst die Aufhebung sämtlicher fünf Seidelschen Fehler noch nicht die Garantie geben, daß das betreffende System als photographisches Objektiv gute Dienste leisten würde, weil die Voraussetzung relativ schwach zur Achse geneigter Strahlen für ein photographisches Objektiv im allgemeinen nicht zulässig ist. Immerhin kann man aber beim ersten Entwurf eines Objektives unter Umständen von einem auf Grund dieser Annäherungsformeln errechneten Systeme ausgehen. Aus diesen praktischen Rücksichten geben wir hier die Resultate einer Rechnung von H. Harting (Sitzungsberichte der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. Bd. CVIII, Abt. IIa, 1899).

Setzt man nämlich ein verkittetes System von zwei dünnen Linsen voraus, so hat man drei Radien r_1, r_2, r_3 zur Verfügung und kann drei Bedingungen erfüllen. Als solche wählt Harting:

1. Innehaltung einer gegebenen Brennweite,
2. Aufhebung der sphärischen Aberration auf der Achse für einen fernen Objektpunkt,
3. Herstellung der Achromasie für die fokalen Schnittweiten.

Sind n_1 und n_2 die Brechungsexponenten der beiden Linsen für eine mittlere Linie des Spektrums und $d n_1$ und $d n_2$ die Dispersionen, deren Wirkung unschädlich gemacht werden soll, so berechne man

$$\alpha = \frac{d n_2}{(n_1 - 1)\, d n_2 - (n_2 - 1)\, d n_1},$$

$$\beta = \frac{d n_2 - d n_1}{(n_1 - 1)\, d n_2 - (n_2 - 1)\, d n_1};$$

$$A = 1 + 2(\beta + 1)\frac{n_2 - 1}{n_2^2} - 2\alpha \frac{n_2 - n_1}{n_1 n_2^2}(n_1 + n_2 - n_1 n_2),$$

$$B = \alpha^2 \frac{(n_2 - n_1)}{n_2^2}(3 n_1 + n_2 - n_1 n_2) - (\beta + 1)^2 \frac{n_2 - 1}{n_2^2}$$
$$- 2(\beta + 1)\left(1 + \frac{n_2 - n_1}{n_2^2}\alpha\right),$$

$$C = -\alpha^3 n_1^2 \frac{(n_2 - n_1)}{n_2^2} + (\beta + 1)^2\left(1 + \frac{n_2 - n_1}{n_2^2}\alpha\right).$$

Die reziproken Radien ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 sind dann:

$$\varrho_1 = -\frac{1}{2A}\left(B \mp \sqrt{B^2 - 4AC}\right),$$

$$\varrho_2 = \varrho_1 - \alpha, \qquad \varrho_3 = \varrho_1 - \beta,$$

und die reziproken Brennweiten φ_1 und φ_2 der beiden Linsen sind

$$\varphi_1 = (n_1 - 1)\alpha\,, \quad \varphi_2 = 1 - (n_1 - 1)\alpha\,.$$

Unter Anwendung der Formeln (105a) bis (107) berechnet dann Harting noch denjenigen Blendenabstand m, für den die Krümmungsradien des sagittalen und meridionalen Bildes im Scheitel einander gleich werden. Es wird also hierbei entsprechend unseren obigen Ausführungen der zwangsweise Verlauf der Bündel durch eine — theoretisch wenigstens — unendlich dünne Blende vorausgesetzt.

Es ergibt sich:

$$Q_1 = \varrho_1\,, \qquad \Delta_1 = \frac{n_1 - 1}{n_1^2}\varrho_1\,,$$

$$Q_2 = \varrho_2 - \varphi_1\,, \quad \Delta_2 = \frac{\varphi_1}{n_2^2} + \frac{n_2 - 1}{n_2^2}\varrho_2 - \frac{n_1 - 1}{n_1^2}\varrho_1\,,$$

$$Q_3 = \varrho_3 - 1\,, \quad \Delta_3 = 1 - \frac{\varphi_1}{n_2^2} - \frac{n_2 - 1}{n_2^2}\varrho_2\,,$$

$$S_1 = Q_1\Delta_1 + Q_2\Delta_2 + Q_3\Delta_3\,.$$

Hieraus berechnet sich dann der Blendenabstand:

$$m = \frac{2 + \frac{\varphi_1}{n_1} + \frac{\varphi_2}{n_2}}{4\,S_1}\,.$$

Eine Bildebenung ist also hiermit nicht garantiert, da es dahingestellt bleibt, wie groß der Radius der bildseitigen Krümmungskugel ist.

Zahlenbeispiel:

$$n_1 = 1{,}56448\,, \quad dn_1 = 0{,}01018 \text{ Baryt-Leichtflint,}$$
$$n_2 = 1{,}60551\,, \quad dn_2 = 0{,}01585 \text{ Leichtflint.}$$

Es ergibt sich:

$$\alpha = 5{,}696\,, \quad \beta = 2{,}037$$
$$A = 2{,}351\,, \quad B = -6{,}837\,, \quad C = 2{,}864$$
$$\varrho_1 = 0{,}5075\,,$$
$$\varrho_2 = -5{,}188\,,$$
$$\varrho_3 = -1{,}530\,,$$
$$\varphi_1 = 3{,}215\,, \quad \varphi_2 = -2{,}215\,,$$
$$S_1 = -1{,}655\,,$$
$$m = -0{,}4042\,.$$

Die Gesamtbrennweite der Kombination und demnach auch die Größe $\varphi_1 + \varphi_2$ ist hier gleich der Einheit vorausgesetzt. Auf die Brennweite 200 bezogen, würde sich für die Radien selbst ergeben:

$$r_1 = 197{,}0\,,$$
$$r_2 = -19{,}27\,,$$
$$r_3 = -65{,}36\,,$$
$$m = -40{,}42\,.$$

Durch geeignete Wahl der Glassorten würde man ohne Zweifel günstigere Radien (mit geringeren Krümmungen) errechnen und könnte das betreffende System (nach Harting) mit Erfolg als hintere Aplanatenhälfte verwenden.

§ 51. Das Gaußobjektiv.

Unter Gaußobjektiv versteht man ursprünglich ein Fernrohrobjektiv, das für achsennahe Strahlen (Seidelsches Gebiet) folgende Bedingungen erfüllt:

1. Es besitzt eine gegebene Brennweite.
2. Es ist achromatisch für zwei Linien des Spektrums.
3. Es ist für beide gemäß 2. in Frage kommenden Farben frei von sphärischer Aberration.

Die unter 3. aufgestellte Forderung wird insbesondere als „Gaußbedingung“ bezeichnet.

Betreffs der Radien und Glassorten muß ich auf mein Lehrbuch der geometrischen Optik, Leipzig 1902, verweisen.

Die typische Form des Gaußobjektives wird durch Figur 25 dargestellt; der positive Meniskus besteht aus Crownglas, der negative aus Flintglas. Alle vier Radien sind also positiv, doch kann bei Verwendung gewisser Glasarten der hintere Radius (r_2) des positiven Meniskus auch unendlich groß oder gar negativ werden.

Fig. 25.

Wir erwähnen das Gaußobjektiv nur, weil es in neuester Zeit oft als Typus für photographische Objektive gewählt worden ist, insbesondere in seiner Verdoppelung als symmetrisches Objektiv.

Kapitel 6.

Die Wellenfläche und die Hamiltonsche Funktion. Der endliche Strahlengang.

§ 52. Vorbemerkung.

Wir nennen in der geometrischen Optik eine Größe „endlich", wenn wir keine beschränkenden Voraussetzungen über sie gemacht haben, wie dies für die Strahlenneigungen im Gaußschen und Seidelschen Gebiete geschah. In den nachfolgenden Betrachtungen werden also zunächst die Strahlenneigungen als beliebig groß angenommen. Die Schwierigkeiten, den Vorgang der Bilderzeugung mathematisch allgemein und doch durchgreifend darzustellen, wachsen hier allerdings außerordentlich, so daß wir bald gezwungen werden, unsere zunächst allgemeinen Betrachtungen auf bestimmte einfache und besonders wichtige Fälle einzuschränken. Zunächst schicken wir einen geometrischen Hilfssatz voraus.

§ 53. Ein Hilfssatz.

Wir denken uns im Raume ein beliebiges geschlossenes Polygon mit den Seiten r, r_1, $r_2 \ldots$, die Winkel, welche diese Strecken r, $r_1 \ldots$ mit der xy-Ebene bilden, seien ϑ, $\vartheta_1 \ldots$. Projizieren wir dieses Polygon auf die xy-Ebene, so erhalten wir in der xy-Ebene wiederum ein in sich geschlossenes Polygon mit den Seiten $r\cos\vartheta$, $r_1\cos\vartheta_1$, $r_2\cos\vartheta_2 \ldots$. Es sei (Fig. 26) die xy-Ebene die Zeichnungsebene und $PABCP'$ das geschlossene Polygon in derselben, wobei wir der Anschaulichkeit wegen unsere Betrachtungen an ein Fünfeck anknüpfen.

Bilden nun diese Strecken $r\cos\vartheta$, $r_1\cos\vartheta_1$, $r_2\cos\vartheta_2 \ldots$ mit der x-Achse die Winkel ψ, ψ_1, $\psi_2 \ldots$, und projizieren wir die

einzelnen Seiten des Polygons auf die x-Achse, so sind die Projektionen der einzelnen Seiten

$$r \cos\vartheta \cos\psi = a, \quad r_1 \cos\vartheta_1 \cos\psi_1 = a_1, \quad r_2 \cos\vartheta_2 \cos\psi_2 = a_2 \ldots,$$

und weiter ist, wie sich unmittelbar aus der Figur 26 ergibt:

$$r \cos\vartheta \cos\psi = r_1 \cos\vartheta_1 \cos\psi_1 + r_2 \cos\vartheta_2 \cos\psi_2 + \ldots.$$

Sind nun weiter $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \ldots$ die Winkel, welche die ursprünglichen Strecken $r, r_1, r_2 \ldots$ direkt mit der x-Achse bilden, so ist bekanntlich:

Fig. 26.

$$\cos\vartheta \cos\psi = \cos\alpha, \qquad \cos\vartheta_1 \cos\psi_1 = \cos\alpha_1 \ldots,$$

und wir haben also die Beziehung:

$$r \cos\alpha = r_1 \cos\alpha_1 + r_2 \cos\alpha_2 + r_3 \cos\alpha_3 + \ldots.$$

Diese Beziehung gilt für die x-Achse, zwei ganz analoge Beziehungen ergeben sich für die y- und z-Achse. Wir können also unseren Hilfssatz so aussprechen:

Wenn ich zwei ganz beliebige Punkte P und P' im Raume durch eine Gerade r verbinde und außerdem zwischen ihnen einen gebrochenen, aus den Strecken $r_1, r_2, r_3 \ldots$ bestehenden Linienzug ziehe, so bestehen, wenn die Strecken $r, r_1, r_2, r_3 \ldots$ mit den drei

Koordinatenachsen bzw. die Winkel α, α_1, $\alpha_2 \ldots$, β, β_1, $\beta_2 \ldots$, γ, γ_1, $\gamma_2 \ldots$ bilden, stets die Beziehungen

$$r \cos\alpha = r_1 \cos\alpha_1 + r_2 \cos\alpha_2 + \ldots,$$
$$r \cos\beta = r_1 \cos\beta_1 + r_2 \cos\beta_2 + \ldots,$$
$$r \cos\gamma = r_1 \cos\gamma_1 + r_2 \cos\gamma_2 + \ldots.$$

Wir kehren jetzt zurück zu unseren optischen Betrachtungen, kümmern uns jetzt aber nicht mehr um das paraxiale Gebiet, sondern suchen Gesetze zu finden, welche für ganz beliebige Strahlen und ganz beliebige brechende Systeme gelten. Die letzteren brauchen nicht mehr aus zentrierten Flächen zu bestehen, ja es brauchen nicht einmal Kugelflächen zu sein. Die folgenden Betrachtungen gelten also ganz allgemein.

§ 54. Analytische Beziehungen zwischen den Richtungskosinussen des eintretenden und austretenden Strahles.

Es sei uns gegeben eine beliebige brechende Fläche zwischen zwei Medien mit den Brechungsexponenten n und n'. In einem beliebigen Punkte S sei die Normale zu dieser Fläche gezogen. Es falle in S (Fig. 27) ein Strahl auf unter einem Einfallswinkel i und habe nach der Brechung den Brechungswinkel i'. Nach dem Brechungsgesetze liegen dann der einfallende und der gebrochene Strahl in einer Ebene, und es ist

Fig. 27.

$$n \sin i = n' \sin i'. \tag{119}$$

Wir wollen jetzt die analytischen Beziehungen suchen, welche zwischen den Richtungskosinussen des eintretenden und gebrochenen Strahles bestehen. Zu diesem Zwecke führen wir ein räumliches Koordinatensystem ein. Die drei Winkel, welche die Normale mit den drei Koordinatenachsen bildet, seien λ, μ, ν, der einfallende Strahl bilde mit den Koordinatenachsen die Winkel α, β, γ und der gebrochene die Winkel α', β', γ'. Wir tragen vom Punkte S aus auf dem einfallenden Strahle das Stück $n = SQ$ und auf dem gebrochenen Strahle das Stück $n' = SQ'$ ab und fällen von den Punkten Q und Q'

die Lote QP und $Q'P'$ auf die Normale, dann entstehen zwei kleine rechtwinklige Dreiecke.

Im $\triangle SQP$ ist die Hypotenuse $= n$,
die beiden Katheten sind $= n \sin i$ und $n \cos i$.

Im $\triangle SQ'P'$ ist die Hypotenuse $= n'$,
die beiden Katheten sind $= n' \sin i'$ und $n' \cos i'$.

Wir müssen jetzt noch die beiden Lote PQ und $P'Q'$ auf unser Koordinatensystem beziehen. Da die beiden Lote nach unserer Konstruktion normal auf der Normalen der Fläche stehen und außerdem in derselben Ebene liegen, so sind sie parallel, bilden also mit den Koordinatenachsen dieselben Winkel; diese Winkel seien a, b, c. Projizieren wir die drei Seiten der beiden Dreiecke jetzt auf die x-Achse, so ist nach unserem Hilfssatze (§ 53)

$$(120) \qquad \begin{cases} n \cos\alpha = n \cos i \cos\lambda + n \sin i \cos a, \\ n' \cos\alpha' = n' \cos i' \cos\lambda + n' \sin i' \cos a. \end{cases}$$

Durch Subtraktion dieser beiden Gleichungen ergibt sich unter Berücksichtigung der Gleichung (119)

$$(121) \qquad n \cos\alpha - n' \cos\alpha' = (n \cos i - n' \cos i') \cos\lambda.$$

Projizieren wir die Dreiecke entsprechend auf die y- und auf die z-Achse, so ergeben sich zwei entsprechende Gleichungen. Wir erhalten also das Gleichungssystem

$$(122) \qquad \begin{cases} n \cos\alpha - n' \cos\alpha' = (n \cos i - n' \cos i') \cos\lambda, \\ n \cos\beta - n' \cos\beta' = (n \cos i - n' \cos i') \cos\mu, \\ n \cos\gamma - n' \cos\gamma' = (n \cos i - n' \cos i') \cos\nu. \end{cases}$$

Diese drei Gleichungen sind die Grundgleichungen der analytischen Dioptrik. Aus ihnen kann man, wenn die Brechungsexponenten und der einfallende Strahl mit seinen Richtungskosinussen gegeben sind, die Richtungskosinusse für den gebrochenen Strahl herleiten.

Bemerkung: Es kommen in diesen drei Gleichungen (122) zwar noch der Einfallswinkel i und der Brechungswinkel i' vor. Diese kann man aus den drei Gleichungen unter Hinzuziehung des Brechungsgesetzes eliminieren. Man erhält dann zwei Gleichungen zwischen den Unbekannten $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$, welche i und i' nicht mehr enthalten. Zu diesen beiden Gleichungen kommt dann noch die Gleichung

$$\cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' = 1$$

hinzu, und man hat so drei Gleichungen mit den drei Unbekannten α', β', γ'.

§ 55. Einführung der Gleichung der brechenden Fläche.

Wir führen nun noch die brechende Fläche ein. Jede Fläche im Raume ist dargestellt durch eine Gleichung zwischen den drei Koordinaten. Wegen der leichteren Übersicht wollen wir die der Gleichung der Fläche genügenden Koordinaten mit ξ, η, ζ bezeichnen, indem wir uns die Koordinaten x, y, z für Punkte auf den Strahlen vorbehalten. Die Gleichung der Fläche sei

$$\psi(\xi, \eta, \zeta) = 0 \tag{123}$$

oder, wenn wir sie differenzieren,

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} d\zeta = 0 . \tag{124}$$

Diese Gleichung dividieren wir durch

$$\sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \zeta}\right)^2},$$

dann erhalten wir

$$\frac{\frac{\partial \psi}{\partial \xi}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \zeta}\right)^2}} d\xi + \frac{\frac{\partial \psi}{\partial \eta}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \zeta}\right)^2}} d\eta$$
$$+ \frac{\frac{\partial \psi}{\partial \zeta}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \zeta}\right)^2}} d\zeta = 0 .$$

Die drei Koeffizienten von $d\xi$, $d\eta$ und $d\zeta$ sind aber weiter nichts als die Richtungskosinusse der Normalen der Fläche, die wir ja mit λ, μ, ν bezeichnet hatten. Die Gleichung der Fläche geht also über in

$$\cos\lambda\, d\xi + \cos\mu\, d\eta + \cos\nu\, d\zeta = 0 . \tag{125}$$

Wir multiplizieren jetzt die Gleichungen (122) der Reihe nach mit $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ und addieren sie, dann ist

$$\begin{aligned}(n\cos\alpha - n'\cos\alpha')\, d\xi + (n\cos\beta - n'\cos\beta')\, d\eta + (n\cos\gamma - n'\cos\gamma')\, d\zeta \\ = (n\cos i - n'\cos i')\,(\cos\lambda\, d\xi + \cos\mu\, d\eta + \cos\nu\, d\zeta) .\end{aligned} \tag{126}$$

Aus den beiden letzten Gleichungen ergibt sich schließlich

$$\left\{\begin{aligned}(n\cos\alpha - n'\cos\alpha')\, d\xi + (n\cos\beta - n'\cos\beta')\, d\eta \\ + (n\cos\gamma - n'\cos\gamma')\, d\zeta = 0 .\end{aligned}\right. \tag{127}$$

§ 56. Berechnung des Differentials der optischen Länge.

Wir denken uns ein System von brechenden Flächen, durch welches ein Strahl hindurchgeht. Wir greifen irgend eine beliebige Fläche aus der Zahl der brechenden Flächen heraus, der Einfachheit halber wollen wir uns vorläufig von den Indizes freihalten. Die Brechungsexponenten der beiden durch die brechende Fläche getrennten Medien seien n und n'. Wir nehmen (Fig. 28) auf dem einfallenden Strahle irgendwo

Fig. 28.

einen Punkt $P(x, y, z)$ und auf dem gebrochenen Strahle einen Punkt $P'(x', y', z')$ an. Der Punkt S, in dem der Strahl die brechende Fläche trifft, habe die Koordinaten (ξ, η, ζ), und es sei

$$PS = l, \quad P'S = l'.$$

Die Größe $nl + n'l'$ nennen wir die „optische Länge". Es ist dann zunächst (Fig. 28)

$$\text{(128)} \qquad \begin{cases} l^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2, \\ l'^2 = (x' - \xi)^2 + (y' - \eta)^2 + (z' - \zeta)^2, \end{cases}$$

weiter sind die Richtungskosinusse von l:

$$\text{(129)} \qquad \cos\alpha = \frac{\xi - x}{l}, \quad \cos\beta = \frac{\eta - y}{l}, \quad \cos\gamma = \frac{\zeta - z}{l}$$

und von l':

$$\text{(130)} \qquad \cos\alpha' = \frac{\xi - x'}{l'}, \quad \cos\beta' = \frac{\eta - y'}{l'}, \quad \cos\gamma' = \frac{\zeta - z'}{l'}.$$

Wir betrachten jetzt einen Strahl, der dem Strahle PSP' unendlich benachbart ist. Er wird durch die Punkte $(x + dx, y + dy, z + dz)$, $(\xi + d\xi, \eta + d\eta, \zeta + d\zeta)$ und $(x' + dx', y' + dy', z' + dz')$ gehen. Um den Unterschied in der optischen Länge dieser beiden Strahlen zu finden, müssen wir die Gleichungen (128) differenzieren. Wir differenzieren zunächst die erste der beiden Gleichungen (128) und erhalten:

$$l\,dl = (\xi - x)(d\xi - dx) + (\eta - y)(d\eta - dy) + (\zeta - z)(d\zeta - dz)$$

oder

$$\text{(131)} \quad dl = \frac{\xi - x}{l}(d\xi - dx) + \frac{\eta - y}{l}(d\eta - dy) + \frac{\zeta - z}{l}(d\zeta - dz),$$

ebenso ergibt sich durch Differentiation der zweiten der Gleichungen (128)

$$(132)\quad dl' = \frac{\xi - x'}{l'}(dx' - d\xi) + \frac{\eta - y'}{l'}(dy' - d\eta) + \frac{\zeta - z'}{l'}(dz' - d\zeta),$$

und aus diesen beiden letzten Gleichungen in Verbindung mit den Gleichungen (129) und (130) erhalten wir

$$(133)\quad dl = \cos\alpha\,(d\xi - dx) + \cos\beta\,(d\eta - dy) + \cos\gamma\,(d\zeta - dz),$$

$$(134)\quad dl' = \cos\alpha'(dx' - d\xi) + \cos\beta'(dy' - d\eta) + \cos\gamma'(dz' - d\zeta).$$

Wenn wir jetzt Gleichung (133) mit n und Gleichung (134) mit n' multiplizieren und die beiden Gleichungen dann addieren, so erhalten wir das Differential der optischen Länge

$$\begin{aligned} n\,dl + n'\,dl' = {} & (n\cos\alpha - n'\cos\alpha')\,d\xi + (n\cos\beta - n'\cos\beta')\,d\eta \\ & + (n\cos\gamma - n'\cos\gamma')\,d\zeta - n\cos\alpha\,dx - n\cos\beta\,dy \\ & - n\cos\gamma\,dz + n'\cos\alpha'\,dx' + n'\cos\beta'\,dy' + n'\cos\gamma'\,dz' \end{aligned}$$

oder unter Berücksichtigung der Gleichung (127):

$$(135)\quad \left\{ \begin{aligned} d(nl + n'l') = {} & n'\cos\alpha'\,dx' + n'\cos\beta'\,dy' + n'\cos\gamma'\,dz' \\ & - (n\cos\alpha\,dx + n\cos\beta\,dy + n\cos\gamma\,dz). \end{aligned} \right.$$

Wir sehen also, daß das Differential der optischen Länge abhängt von den Brechungsexponenten n und n', von den Differentialen der Koordinaten (x, y, z) und (x', y', z') und von den Neigungen α, β, γ und α', β', γ', dagegen hängt es nicht ab von den Differentialen dieser Neigungen. Im übrigen sind die beiden Teile des Ausdruckes für das Differential der optischen Länge ganz gleich gebaut, sie unterscheiden sich nur dadurch, daß die Größen des ersten Gliedes alle mit einem Striche versehen sind. Wir wollen die beiden Glieder mit p' und p bezeichnen, dann erhalten wir

$$(136)\quad d(nl + n'l') = p' - p,$$

wo also

$$(137)\quad \left\{ \begin{aligned} p &= n\cos\alpha\,dx + n\cos\beta\,dy + n\cos\gamma\,dz, \\ p' &= n'\cos\alpha'\,dx' + n'\cos\beta'\,dy' + n'\cos\gamma'\,dz' \end{aligned} \right.$$

ist. Die Gleichung (136) gestattet die Ausdehnung unserer Betrachtungen auf ein System von beliebig vielen brechenden Flächen.

Wir nehmen jetzt (Fig. 29) ein optisches System aus $\varkappa$ brechenden Flächen an. Die Brechungsexponenten der verschiedenen Medien seien $n_1, n_2, \ldots n_\varkappa, n_{\varkappa+1}$. Irgendwo im Raume befinde sich ein Punkt P_1, von dem Strahlen ausgehen. Wir verfolgen einen bestimmten von P_1 ausgehenden und das System durchdringenden Strahl, der nach dem

Brechungsgesetze gebrochen wird und die einzelnen Flächen in den Punkten S_1, S_2,... $S_\varkappa$ schneidet (Fig. 29). Das vom Punkte P_1 bis zur ersten brechenden Fläche verlaufende Stück $P_1 S_1$ des Strahles bezeichnen wir mit r_1, das von der ersten bis zur zweiten brechenden

Fig. 29.

Fläche verlaufende Stück $S_1 S_2$ mit r_2 usw. bis zu dem im letzten, d. h. im $(\varkappa+1)^{\text{ten}}$ Medium verlaufenden Stück $S_\varkappa P_{\varkappa+1}$, wo $P_{\varkappa+1}$ der Bildpunkt von P ist. Dieses bezeichnen wir mit $r_{\varkappa+1}$. Dann ist die ganze optische Länge:

$$V = n_1 r_1 + n_2 r_2 + \ldots + n_\varkappa r_\varkappa + n_{\varkappa+1} r_{\varkappa+1}\,.$$

Es sei P_2 (Fig. 29) ein beliebiger Punkt auf der Strecke $r_2 = S_1 S_2$, und es sei

$$S_1 P_2 = l_1' \quad \text{und} \quad P_2 S_2 = l_2\,.$$

Weiter sei P_3 ein beliebiger Punkt auf der Strecke $S_2 S_3$ und

$$S_2 P_3 = l_2' \quad \text{und} \quad S_3 P_3 = l_3$$

und so fort bis zu der letzten Fläche. Es sei schließlich $P_\varkappa$ ein beliebiger Punkt auf der Strecke $r_\varkappa = S_{\varkappa-1} S_\varkappa$ und

$$S_{\varkappa-1} P_\varkappa = l_{\varkappa-1}' \quad \text{und} \quad S_\varkappa P_\varkappa = l_\varkappa\,.$$

Auf dieses System wenden wir die Formel (136) wiederholt an. Für die einzelnen Flächen erhalten wir somit:

1te Fläche	$d(n_1 r_1 + n_2 l_1') = p_2 - p_1$,
2te Fläche	$d(n_2 l_2 + n_3 l_2') = p_3 - p_2$,
3te Fläche	$d(n_3 l_3 + n_4 l_3') = p_4 - p_3$,
4te Fläche	$d(n_4 l_4 + n_5 l_4') = p_5 - p_4$,
......	....
$(\varkappa-1)^{\text{te}}$ Fläche	$d(n_{\varkappa-1} l_{\varkappa-1} + n_\varkappa l_{\varkappa-1}') = p_\varkappa - p_{\varkappa-1}$,
$\varkappa^{\text{te}}$ Fläche	$d(n_\varkappa l_\varkappa + n_{\varkappa+1} r_{\varkappa+1}) = p_{\varkappa+1} - p_\varkappa$.

Dieses System von Gleichungen wollen wir addieren. Wir erhalten:

$$d[n_1 r_1 + n_2(l_1' + l_2) + n_3(l_2' + l_3) + n_4(l_3' + l_4) + \dots + n_\varkappa(l_{\varkappa-1}' + l_\varkappa) + n_{\varkappa+1} r_{\varkappa+1}] = p_{\varkappa+1} - p_1 .$$

Berücksichtigen wir nun, daß

$$l_1' + l_2 = r_2 , \quad l_2' + l_3 = r_3 , \dots \quad l_{\varkappa-1}' + l_\varkappa = r_\varkappa ,$$

so geht die letzte Gleichung über in

$$d(n_1 r_1 + n_2 r_2 + n_3 r_3 + n_4 r_4 + \dots + n_\varkappa r_\varkappa + n_{\varkappa+1} r_{\varkappa+1}) = dV = p_{\varkappa+1} - p_1$$

oder

$$d\Sigma n r = p_{\varkappa+1} - p_1 , \tag{138}$$

wo

$$p_{\varkappa+1} = n_{\varkappa+1}\cos\alpha_{\varkappa+1}\, dx_{\varkappa+1} + n_{\varkappa+1}\cos\beta_{\varkappa+1}\, dy_{\varkappa+1} + n_{\varkappa+1}\cos\gamma_{\varkappa+1}\, dz_{\varkappa+1} ,$$
$$p_1 = n_1\cos\alpha_1\, dx_1 + n_1\cos\beta_1\, dy_1 + n_1\cos\gamma_1\, dz_1 .$$

Wir sehen also, daß das Differential der optischen Länge ein Ausdruck ist, der nur abhängt von dem Objektraume und dem Bildraume, nicht aber von der Anzahl und der Beschaffenheit der dazwischenliegenden Medien.

§ 57. Fall, daß $dV = 0$ ist.

Denken wir uns nun, der unendlich benachbarte Strahl gehe nicht durch den Punkt $(x_1 + dx_1 , y_1 + dy_1 , z_1 + dz_1)$, sondern durch den Punkt (x_1 , y_1 , z_1) selbst, d. h. nehmen wir im Objektraume einen leuchtenden Punkt an, von dem zwei unendlich benachbarte Strahlen ausgehen, so verschwinden die Größen dx_1, dy_1, dz_1, und wir haben dann

$$\begin{cases} dx_1 = 0 , \\ dy_1 = 0 , \\ dz_1 = 0 . \end{cases} \tag{139}$$

Denken wir uns weiter, daß der unendlich benachbarte Strahl nach der Brechung durch das System im Bildraume auch durch den Punkt $P_{\varkappa+1}(x_{\varkappa+1} , y_{\varkappa+1} , z_{\varkappa+1})$ geht, so verschwinden auch die Größen $dx_{\varkappa+1}$, $dy_{\varkappa+1}$, $dz_{\varkappa+1}$. Es ist also dann auch noch:

$$\begin{cases} dx_{\varkappa+1} = 0 , \\ dy_{\varkappa+1} = 0 , \\ dz_{\varkappa+1} = 0 , \end{cases} \tag{140}$$

Alsdann liefert Gleichung (138)

$$d\Sigma nr = dV = 0 . \tag{141}$$

Gleichung (141) sagt aus, daß V ein Grenzwert ist, den wir hier im allgemeinen als ein Minimum auffassen können. Von allen Strahlen, die von P_1 ausgehend nach $P_{\varkappa+1}$ gelangen, hat also derjenige die kleinste optische Länge, der nach dem Brechungsgesetze gebrochen wird.

§ 58. Weitere Bemerkungen über die optische Länge.

Wir haben, um zur Erkenntnis der Minimumeigenschaft des Lichtes zu gelangen, einen Strahl, der nach dem Brechungsgesetze gebrochen wird, verglichen mit einem nach einem beliebigen Gesetze gebrochenen Strahle, der jedoch als dem ersteren unendlich nahe verlaufend gedacht wurde. Fassen wir diesen Nachbarstrahl als einen solchen auf, der ebenfalls von P_1 ausgehend dem Brechungsgesetze folgt, so werden wir die Annahme, daß er nach der Brechung durch $P_{\varkappa+1}$ gehe, allgemein nicht machen dürfen. Denn wie wir gesehen haben, gehen zwei von einem leuchtenden Punkte ausgehende Strahlen nach der Brechung notwendig durch einen Punkt nur so lange, als wir uns im paraxialen Gebiete befinden. Sobald wir dieses verlassen, werden sich zwei von einem Punkte ausgehende Strahlen nach der Brechung im allgemeinen gar nicht schneiden, sondern sich kreuzen, d. h. nichts anderes, als die Größen $dx_{\varkappa+1}$, $dy_{\varkappa+1}$, $dz_{\varkappa+1}$ werden im allgemeinen gar nicht verschwinden. Aber auch für das außerparaxiale Gebiet verschaffen uns unsere Gleichungen große Klarheit über den Gang der Strahlen im Raume.

Wir nehmen einen leuchtenden Punkt im Objektraume an, von dem zwei unendlich benachbarte Strahlen ausgehen. Wir setzen also

$$dx_1 = 0 ,$$
$$dy_1 = 0 ,$$
$$dz_1 = 0 .$$

Um uns von den Indizes freizuhalten, nehmen wir weiter an, die Strahlen gehen nach der Brechung, welche sie durch ein System von beliebig vielen Flächen erleiden, im Bildraume durch die unendlich benachbarten Punkte (x, y, z) und $(x + dx, y + dy, z + dz)$. Wir setzen also

$$dx_\varkappa = dx ,$$
$$dy_\varkappa = dy ,$$
$$dz_\varkappa = dz .$$

Endlich nehmen wir noch an, der Brechungsexponent des Bildraumes sei n, wir setzen also

$$n_{\varkappa+1} = n\,.$$

Unter diesen Annahmen erhalten wir die einfache Beziehung

$$d\,\Sigma\,n\,r = d\,V = n(\cos\alpha\,dx + \cos\beta\,dy + \cos\gamma\,dz)\,, \tag{142}$$

wo $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ die Richtungskosinusse des durch den Punkt (x, y, z) gehenden Strahles sind.

§ 59. Die Hamiltonsche Funktion und der Satz von Malus.

Wir können die Funktion $V = \Sigma n r$ immer auffassen als eine Funktion der drei Koordinaten des leuchtenden Punktes im Objektraume, die wir mit a, b, c bezeichnen wollen, von dem das Licht ausgeht, und der drei Koordinaten x, y, z eines Punktes im Bildraume nach beliebig vielen Brechungen, und zwar eines Punktes, in welchem wir den Wert der Funktion V betrachten wollen. Denn denken wir uns etwa, es wären die beiden Punkte (a, b, c) im ersten und (x, y, z) im letzten Medium gegeben, so gibt es im allgemeinen nur einen von dem ersten Punkte ausgehenden Strahl, der nach der Brechung durch das System durch den zweiten Punkt hindurchgeht. Infolgedessen müssen sich alle Bestimmungsstücke des zwischen diesen beiden Punkten verlaufenden gebrochenen Strahles analytisch durch die Konstanten des Systemes und durch die sechs Koordinaten der beiden Punkte ausdrücken lassen. Zu diesen Bestimmungsstücken gehören aber auch die Größen $r_1, r_2, \ldots r_\varkappa$. Setzt man also die hierfür gewonnenen Ausdrücke in den Ausdruck $\Sigma n r$ ein, so stellt sich, wie oben behauptet, die Funktion V als nur abhängig von den Koordinaten a, b, c, x, y, z dar.

Die Form dieser Funktion ist schon für die einfachsten Fälle der Dioptrik sehr kompliziert, und man wird kaum erwarten können, daß sie für ein aus mehreren dicken Linsen bestehendes photographisches Objektiv je wird angegeben werden.

Läßt man a, b, c konstant, faßt also nur einen einzigen leuchtenden Punkt ins Auge, so ist also V eine Funktion von x, y, z und wird „Hamiltonsche Funktion" genannt, weil Hamilton dieselbe zuerst für die theoretische Optik verwertete.

Wir wollen hier noch einige Eigenschaften dieser Funktion herleiten: Geht man von einem Punkte (x, y, z) zu einem benachbarten $(x + dx,\ y + dy,\ z + dz)$ über, so nimmt V um die Größe

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz \tag{143}$$

zu. Wir hatten aber oben (Gleichung 142) als allgemeinen Ausdruck für dV gefunden:

$$dV = n\cos\alpha\,dx + n\cos\beta\,dy + n\cos\gamma\,dz\,, \tag{144}$$

wo α, β, γ die Winkel waren, die ein durch den Punkt (x, y, z) gehender Strahl mit den Koordinatenachsen bildet. Da nun dx, dy, dz ganz beliebige Zunahmen waren, so können die beiden letzten Gleichungen nur dann nebeneinander bestehen, wenn man einzeln hat:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = n\cos\alpha\,, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = n\cos\beta\,, \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = n\cos\gamma\,. \tag{145}$$

Quadriert und addiert man diese Gleichungen, so wird:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 = n^2\,. \tag{146}$$

Aus den beiden letzten Gleichungen ergibt sich sofort:

$$\cos\alpha = \frac{\dfrac{\partial V}{\partial x}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial V}{\partial z}\right)^2}} \tag{147}$$

und analoge Ausdrücke erhält man für $\cos\beta$, $\cos\gamma$.

Diese letzteren Ausdrücke für $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ sind, wie die analytische Geometrie lehrt, nichts anderes als die Richtungskosinusse der Normale der Fläche

$$V = \text{const}\,,$$

und wir haben den Satz:

Die Strahlen im Bildraume sind immer Normalen der Fläche $V = \text{const}$ (Satz von Malus).

§ 60. Die Wellenfläche.

Wir wollen unser letztes Resultat jetzt vom Standpunkte der Wellentheorie aus betrachten. Die Fläche

$$V = \Sigma n r = \text{const} \tag{148}$$

ist nämlich weiter nichts als die vom ursprünglichen Punkte aus fortschreitende und durch die Brechung deformierte Wellenfläche, wie wir sofort zeigen werden. Die Wellentheorie lehrt, daß sich die Brechungsexponenten umgekehrt verhalten wie die Lichtgeschwindigkeiten. Ist also die Lichtgeschwindigkeit im luftleeren Raume v_0 und der zugehörige Brechungsexponent n_0, und ist

die Lichtgeschwindigkeit in irgend einem anderen Medium v und der zugehörige Brechungsexponent n, so besteht nach der Wellentheorie die Beziehung

$$\frac{v_0}{v} = \frac{n}{n_0}.$$

Da man n_0, den Brechungsexponenten des Vakuums, gleich Eins setzt, so hat man also allgemein:

$$n_\varkappa = \frac{v_0}{v_\varkappa},$$

und die Gleichung (148) geht über in

$$V = \Sigma n r = \sum \frac{v_0 r}{v} = \text{const}, \tag{149}$$

oder, da $v_0 = 300\,000$ km/sec eine Konstante ist,

$$V = v_0 \sum \frac{r}{v} = \text{const} \tag{150}$$

oder

$$V = v_0 \left(\frac{r_1}{v_1} + \frac{r_2}{v_2} + \frac{r_3}{v_3} + \ldots \right). \tag{151}$$

Nach den Grunddefinitionen der Mechanik ist

$$\text{Geschwindigkeit} = \frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}} \qquad \text{oder} \qquad \text{Zeit} = \frac{\text{Weg}}{\text{Geschwindigkeit}}.$$

Die Größen $\frac{r_1}{v_1} \ldots$ sind aber weiter nichts als der Quotient aus einem Wege dividiert durch eine Geschwindigkeit, stellen uns also je eine Zeit dar. Wir können die Gleichung (151) also auch schreiben

$$V = v_0 (t_1 + t_2 + t_3 + \ldots) = v_0 \Sigma t. \tag{152}$$

Die einzelnen Summanden in diesem Ausdrucke sind also, abgesehen von dem konstanten Faktor v_0, die Zeiten, welche ein Etwas, das wir Licht nennen, braucht, um die Wege r mit den Geschwindigkeiten v zu durchlaufen, und unsere Funktion V ist also, abgesehen von der Konstanten v_0, im Sinne der Wellentheorie weiter nichts als die Zeit, welche das Licht braucht, um zu einem bestimmten Punkte zu gelangen.

Ist $V = \text{const}$, so muß auch $\Sigma t = \text{const}$ sein, d. h. wir lassen die fortschreitende Welle in einem bestimmten Augenblicke Halt machen. Das Licht wird sich dann gerade auf einer bestimmten Fläche ausgebreitet haben, nämlich auf der Fläche

$$V = v_0 \Sigma t = \text{const}, \tag{153}$$

und diese Fläche ist also die Wellenfläche. Im Sinne der eben näher dargestellten Auffassung sagt die Gleichung (141) in § 57 aus, daß die Zeit, in der das Licht nach beliebig vielen Brechungen zu einem beliebigen Punkte im Bildraume gelangt, ein Minimum ist (Fermatsches Prinzip).

Man bezeichnet die optische Länge zwischen zwei Punkten P und P' auch durch

$$[PP'] .$$

Es ist dies eine Schreibweise, die wir im folgenden auch öfter anwenden werden.

§ 61. Die Fortbewegung der Wellenfläche.

Man gewinnt eine sehr deutliche Vorstellung von dem Verlaufe der Wellenfläche in der Zeit, wenn man sich das System ihrer Normalen gegeben denkt. Sämtliche Normalen bleiben während der Bewegung der Wellenfläche in Ruhe und bilden gewissermaßen das Skelett, an dem die Welle entlang läuft, indem sie beständig zu ihnen senkrecht steht.

Wir erinnern hier an einige Lehren der allgemeinen geometrischen Flächentheorie, woraus wir auf das vorliegende optische Problem Schlüsse ziehen können.

Sei in der Figur 30 Q ein Punkt der Wellenfläche und $Q X_1 X_2$ die Normale in diesem Punkte, welche wir in folgendem als Hauptnormale bezeichnen wollen, so lehrt die Geometrie, daß von allen in der unmittelbaren Nähe von Q konstruierten Normalen sich nur zwei Paare schneiden, während alle anderen sich kreuzen. Legt man nämlich durch die Hauptnormale eine Ebene und läßt diese um die Hauptnormale rotieren, so schneidet diese Ebene während der Rotation die Fläche $V = \text{const}$ beständig in ebenen Kurven, die im Punkte Q eine bestimmte Krümmung haben. Diese Krümmung wird bekanntlich durch den sogenannten Krümmungsradius gemessen, d. h. durch die Schnittweite zweier unendlich benachbarten Normalen in der Ebene der betreffenden Kurve. Die Geometrie lehrt nun weiter, daß von allen diesen Normalschnitten zwei dadurch ausgezeichnet sind, daß sie den größten resp. den kleinsten Krümmungsradius besitzen, und daß gleichzeitig ihre Normalen in der Nachbarschaft des Punktes Q mit den Normalen der Fläche $V = \text{const}$ zusammenfallen. Diese beiden Hauptschnitte mit den zugehörigen Krümmungsmittelpunkten X_1

und X_2 sind in Figur 30 durch $\gamma\gamma' X_1$ und $\beta\beta' X_2$ dargestellt. Die Ebenen der Hauptschnitte und damit auch die Bögen $\beta\beta'$ und $\gamma\gamma'$ stehen aufeinander senkrecht.

Schreitet man jetzt von Q aus auf der Fläche V fort, etwa nach β, so wird man sich in β wieder die Hauptnormale denken können, die mit βX_2 zusammenfällt. Um diese Hauptnormale, und damit um den Punkt β herum, kann man sich wieder ein Bündel von Normalen denken, ganz ähnlich wie vorher um Q. Wie man von Q aus in Richtung der kleinsten Krümmung fortgeschritten war, so kann man nun von β aus wieder in Richtung der kleinsten Krümmung

Fig. 30.

weitergehen und wird so eine Linie auf der Fläche V beschreiben, die man die zum Punkte Q gehörige erste „Krümmungslinie" nennt (die s_1-Linie). Natürlich setzt sich diese auch nach der anderen Seite von Q hin fort, wenn man nämlich von Q nach dem auf der anderen Seite von Q liegenden Punkte β' sich bewegt hätte. Auf analoge Weise wäre man zu der anderen Krümmungslinie (s_2-Linie) gelangt, welche in Q die s_1-Linie senkrecht durchschneidet, wenn man sich nämlich von Q aus in Richtung $Q\gamma$ resp. $Q\gamma'$ bewegt hätte.

Die Krümmungsmittelpunkte X_1 und X_2 (Fig. 30) dieser Krümmungslinien bilden wieder zwei neue Linien, die wir mit σ_1- und σ_2-Linie bezeichnen wollen. Denken wir uns jetzt die ganze Fläche V in diskrete, einander unendlich nahe Punkte Q, Q_1, Q_2 usw. zerlegt, so gibt es für jeden der Punkte Q ein Paar s- und ein Paar σ-Linien.

Der Inbegriff aller s-Linien bildet gewissermaßen die Fläche V selbst, während der Inbegriff der σ_1- und σ_2-Linien je für sich eine Fläche bildet, welche man als die beiden „Krümmungsmittelpunktsflächen" Σ_1 und Σ_2 der Fläche V bezeichnet.

Da wir die Fläche V als Wellenfläche auffassen, so sind die Normalen die Lichtstrahlen, ihre Schnittpunkte miteinander die Bildpunkte. Die ganze Fläche V enthält aber nur das Licht, welches von einem einzigen Objektpunkte P_1 (Fig. 29) herrührt. Das Bild dieses Punktes P_1 im Bildraume — oder vielmehr das Äquivalent für das Bild, d. h. der Schnittpunkt aller Strahlen — ist also dargestellt durch die beiden Flächen Σ_1 und Σ_2. Ist das von P_1 ausstrahlende Licht irgendwo durch eine Blende abgegrenzt, so erscheinen als Bild zwei abgegrenzte Stücke der Σ_1- und Σ_2-Fläche, von denen die eine die meridionalen, die andere die sagittalen Bildpunkte enthält. Da wir, wie schon erwähnt, die Fläche V wegen der mathematischen Schwierigkeiten kaum für die einfachsten Fälle darzustellen vermögen, so ist an eine vollständige analytische Beherrschung dieser Erscheinungen für eine größere Anzahl von Flächen kaum zu denken.

Kapitel 7.

Bedingung für die Aberrationsfreiheit von Punktpaaren bei endlichem Strahlengange.

§ 62. Spezialisierung des allgemeinen Problemes.

Wir werden die allgemeinen Betrachtungen jetzt unter Voraussetzung eines zentrierten Systemes von Kugelflächen nach zwei Richtungen hin spezialisieren, die hier von vornherein angedeutet werden mögen.

1. Wir wollen annehmen, daß die im Objektraume befindlichen lichtaussendenden Punkte auf der Achse oder in der Nähe der Achse des Systemes liegen, und werden dann die Bedingungen aufsuchen, unter welchen die sphärische Aberration für einen oder mehrere dieser Punkte — und zwar für die ganze Öffnung des Systemes — aufgehoben ist.

2. Wir werden die Eigenschaften eines von einem Objektpunkte ausgehenden unendlich dünnen Strahlenbündels näher untersuchen, das unter beliebiger Neigung das System durchdringt.

3. Wir werden alle diejenigen Strahlen näher betrachten, welche von einem beliebigen Objektpunkte ausgehend im Hauptschnitte des zentrierten Systemes verlaufen, und werden diejenige Stelle der im Bildraume erscheinenden kaustischen Linie bestimmen, die eine Strahlenvereinigung höherer Ordnung aufweist.

§ 63. Fall, daß die Wellenfläche nach der Brechung wieder die Kugelgestalt hat.

Wir machen die Annahme, daß das brechende System derart sei, daß die von einem Punkte im Objektraume ausgehende Welle im Bildraume die Gestalt einer Kugel habe, und lassen die Frage offen, welcher Art die Bedingungen sein müssen, denen die Konstanten

des Systemes (Krümmungsradien, Entfernungen der Flächen voneinander, Brechungsexponenten) unter diesen Umständen unterworfen sein müssen.

Die Kugelwellenfläche hat die Eigenschaft, daß alle ihre Normalen durch ein und denselben Punkt P' gehen. Alle Teile dieser Wellenfläche bewegen sich auf denselben Punkt P' zu. Die Wellenfläche kriecht gewissermaßen im Punkte P', d. h. im Bildpunkte, zusammen. Der Punkt P' stellt uns also in dem Augenblicke, wo die Lichtbewegung bei ihm angelangt ist, die ganze Wellenfläche dar. In einem solchen Punkte würde keine Aberration herrschen. Es würde also in diesem Falle Punkt P in P' aberrationslos abgebildet sein. Die analytische Bedingung hierfür ist offenbar $\Sigma n r = \text{const}$. Die Konstante können wir uns, wenn wir den Punkt P auf der Achse liegend annehmen, dadurch bestimmt denken, daß wir den in der optischen Achse verlaufenden Strahl betrachten.

Fig. 31.

Nennen wir r_0 die den allgemeinen Größen r entsprechenden Strecken auf der Achse, so heißt die Bedingung für die Aberrationsfreiheit

$$\Sigma n r = \Sigma n r_0 .$$

So ist z. B. für das durch Figur 31 dargestellte System von vier Flächen, wenn G das aberrationsfreie Bild des Punktes A ist,

$$n_1 AB_1 + n_2 B_1 C_1 + n_3 C_1 D_1 + n_4 D_1 E_1 + n_5 E_1 G$$
$$= n_1 AB + n_2 BC + n_3 CD + n_4 DE + n_5 EG .$$

Die Frage, ob für eine vorgeschriebene Lage von Objektpunkt und Bildpunkt ein System von einer vorgeschriebenen Anzahl von Flächen immer gemäß dieser Bedingung hergestellt werden kann, wollen wir hier unerörtert lassen.

§ 64. Satz über die Lichtbewegung im paraxialen Gebiete.

Im paraxialen Gebiete wird, wie wir gesehen haben, ein Punkt P im Objektraume vollständig aberrationslos in einem Punkte P' des Bildraumes abgebildet. Im paraxialen Gebiete ist also das Verhalten der Lichtwellen derartig, daß eine von P als Kugelfläche ausgehende Lichtwelle auch als Kugelfläche im Punkte P' des Bildraumes ankommt.

Es sei jetzt (Fig. 32) unter Voraussetzung paraxialen Strahlenganges P ein Punkt im Objektraume und P' der zugehörige Punkt im Bildraume. Es besteht dann die Beziehung

$$\Sigma n r = [PP'] = p = \text{const}.$$

Es sei weiter

$$PQ = y$$

ein achsensenkrechtes Objekt und

$$P'Q' = y'$$

das zugehörige Bild dieses Objektes. Es soll festgestellt werden, wie groß die optische Länge von QQ' ist, oder was dasselbe ist, wieviel

Fig. 32.

Zeit das Licht braucht, um vom Punkte Q nach dem Punkte Q' zu gelangen.

Ziehen wir durch den Punkt Q einen achsenparallelen Strahl, so wird dieser nach der Brechung durch den hinteren Brennpunkt F' gehen, und es ist

$$[QQ'] = [QF'] + [F'Q'] . \tag{154}$$

Es besteht nun zunächst die Beziehung:

$$[QF'] = [PF'] \text{ *)} . \tag{155}$$

*) Um die Richtigkeit dieser Behauptung einzusehen, stellen wir folgende Überlegung an. Wir denken uns die beiden Strahlen vom Punkte F' ausgehend und verfolgen sie zurück in den Objektraum. Wie man sieht, sind die beiden Strahlen einander parallel, und beide stehen senkrecht auf PQ. Da die Strahlen nach unseren Definitionen aber die Normalen zur Wellenfläche sind, so muß die Wellenfläche eine zu den Strahlen senkrechte Fläche sein. Da die Strahlen parallel sind, so kann diese Fläche nur eine Ebene sein, d. h. das Stück PQ ist selbst ein Stückchen der Wellenfläche. Wir wissen, daß alle Punkte einer Wellenfläche die Eigenschaft haben, daß die optische Länge in ihnen konstant ist, und somit muß notwendig sein $[QF'] = [PF']$.

Um $[F'Q']$ zu finden, verfahren wir folgendermaßen. Wir setzen

$$F'P' = x' ,$$

dann wird

$$F'Q' = \sqrt{x'^2 + y'^2} = x' \sqrt{1 + \left(\frac{y'}{x'}\right)^2} .$$

Die Quadratwurzel entwickeln wir nach dem binomischen Satze. Da wir uns im paraxialen Gebiete befinden, so ist y' sehr klein, und wir können die Entwicklung nach dem zweiten Gliede abbrechen. Wir haben somit

$$F'Q' = x'\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{y'}{x'}\right)^2\right] = x' + \frac{1}{2}\frac{y'^2}{x'} . \tag{156}$$

In dem kleinen rechtwinkligen Dreieck $F'P'Q'$ ist also immer die Hypotenuse $F'Q'$ um dieses Stück $\frac{1}{2}\frac{y'^2}{x'}$ größer als die Kathete $F'P'$. Multiplizieren wir Gleichung (156) mit n', so geht sie über in

$$n'F'Q' = [F'Q'] = n'x' + \tfrac{1}{2}n'\frac{y'^2}{x'} . \tag{157}$$

Aus den beiden Gleichungen (155) und (157) setzen wir die Werte von $[QF']$ und $[F'Q']$ ein in Gleichung (154). Wir erhalten

$$[QQ'] = [PF'] + n'x' + \tfrac{1}{2}n'\frac{y'^2}{x'} . \tag{158}$$

Nach unseren Definitionen ist aber, wie man auch unmittelbar aus der Figur 32 ersieht,

$$[PF'] + n'x' = [PP'] = p . \tag{159}$$

Und es ergibt sich schließlich

$$[QQ'] = p + \tfrac{1}{2}n'\frac{y'^2}{x'} . \tag{160}$$

Diese Gleichung lehrt uns, daß das Licht eine gewisse Zeit mehr braucht, um von Q nach Q' zu gelangen, als von P nach P'. Diese Zeit ist aber unendlich klein. Da wir uns im paraxialen Gebiete befinden, so ist y' schon sehr klein. y'^2 ist unendlich klein von höherer Ordnung, kann also vernachlässigt werden, und die letzte Gleichung geht somit über in

$$[QQ'] = p . \tag{161}$$

Man kann also den Satz aussprechen:

Alle Punkte einer achsensenkrechten Ebene im Objektraume haben dieselbe optische Länge, oder: das Licht, welches von einer achsensenkrechten Ebene im Objektraume ausgeht, trifft gleichzeitig in einer achsensenkrechten Ebene im Bildraume ein.

§ 65. Die Abbildung im paraxialen Gebiete.

Das unendlich kleine additive Glied der Gleichung (160) kann uns zur Herleitung der im paraxialen Gebiete herrschenden Abbildungsbeziehungen dienen.

Wir sind bei der Bestimmung der optischen Länge von QQ' vom Punkte Q ausgegangen. Wir hätten aber ebensogut vom Punkte Q' ausgehen können, indem wir uns vom Punkte Q' einen achsenparallelen Strahl ausgehen denken, welcher dann durch den vorderen Brennpunkt F gehen würde. Setzt man dann die Entfernung

$$PF = x$$

und stellt genau dieselben Betrachtungen an wie oben, so würde man ganz analog erhalten

$$[Q'Q] = p + \tfrac{1}{2} n \frac{y^2}{x}. \tag{162}$$

Da aber selbstverständlich

$$[Q'Q] = [QQ'] \tag{163}$$

sein muß, so ergibt sich durch Vergleichen der beiden Gleichungen (160) und (162) die Beziehung

$$\frac{n y^2}{x} = \frac{n' y'^2}{x'} \tag{164}$$

oder

$$\left(\frac{y'}{y}\right)^2 = \frac{n}{n'} \cdot \frac{x'}{x}. \tag{165}$$

$\frac{y'}{y}$ ist aber nichts anderes als die Vergrößerung β.

Mittels der Gleichung (165) gelingt es leicht, die sämtlichen Fundamentalsformeln des § 22 herzuleiten.

§ 66. Die allgemeine Bedingung für die aberrationsfreie Abbildung eines Punktpaares.

Wir verlassen jetzt wieder das paraxiale Gebiet, um die allgemeinste Bedingung herzuleiten, welche ein beliebiges zentriertes System erfüllen muß, damit ein in der Nähe der optischen Achse befindliches Paar von Punkten aberrationsfrei abgebildet werden kann, und zwar unter Voraussetzung einer endlichen Öffnung des Systemes.

Auf die Anregung des Verfassers hin hat Herr M. Blanckmeister diese Frage mit Erfolg diskutiert (Inaug.-Diss. Rostock 1904: Über die Hamiltonsche Funktion als Grundlage der geom. Abbildungstheorie usw.). Den betreffenden Ausführungen, bei denen der oben § 64 aufgestellte Satz benützt wird, schließen wir uns in folgendem an.

In der Figur 33 sei S ein zentriertes optisches System mit der Achse LL', sein hinterer Brennpunkt sei F'. In einem beliebigen

Fig. 33.

Punkte P der Achse, unter einem beliebigen Winkel φ gegen diese geneigt, befindet sich im Objektraume ein Linienelement

$$PQ = \varrho .$$

Der Achsenpunkt P möge in P' abgebildet sein und zwar unter der Annahme, daß P für die ganze Öffnung aberrationsfrei abgebildet sei. Lassen wir vom Punkte Q einen achsenparallelen Strahl auf das System auffallen, so wird dieser — weil er infolge der angenommenen Kleinheit von ϱ im paraxialen Gebiete verläuft — durch den hinteren Brennpunkt F' gehen. Auf diesem Strahle befindet sich im Punkte Q' der Bildpunkt von Q.

$$P'Q' = \varrho'$$

wird jetzt das Bild von PQ sein. Sowohl P wie Q sollen nun in P' bzw. Q' aberrationslos abgebildet sein. Die Bedingung hierfür ist, wie wir gesehen haben, die, daß die optische Länge für alle zwischen

P und P' möglichen Wege einen konstanten Wert hat, und ebenso für alle zwischen Q und Q' möglichen Wege. Bezeichnen wir diese konstanten Werte mit p und q, so erhalten wir

$$[PP'] = p\,,$$
$$[QQ'] = q\,.$$

Wir wollen jetzt eine Beziehung zwischen q und p aufsuchen. Zu diesem Zwecke fällen wir von Q und Q' die Lote QT und $Q'T'$ auf die Achse und setzen:

$$PT = dx\,,$$
$$P'T' = dx'\,.$$

Nach dem oben bewiesenen Satze, daß alles von einer achsensenkrechten Ebene im Objektraume ausgehende Licht gleichzeitig in einer achsensenkrechten Ebene im Bildraume eintrifft, hat man:

$$[TT'] = [QQ'] = q\,.$$

Weiter folgt aus Figur 33:

$$[TT'] = [PP'] - [PT] + [P'T']\,,$$

wofür wir unter Benutzung der oben angegebenen Bezeichnungen setzen können:

$$q = p - n\,dx + n'\,dx'\,.$$

Von den unendlich vielen von P ausgehenden Strahlen greifen wir jetzt einen unter einem beliebigen Winkel u gegen die Achse geneigten Strahl PA heraus. Dieser wird durch das System gebrochen, verläßt es im Punkte B' und muß, da ja aberrationslose Abbildung des Punktes P vorausgesetzt ist, nach der Brechung durch den Punkt P' gehen. Der Winkel, welchen der Strahl $B'P'$ mit der Achse bildet, sei u'. Wir greifen nun von den unendlich vielen vom Punkte Q ausgehenden Strahlen denjenigen heraus, welcher dem Strahle PA parallel ist. Dieser treffe das System im Punkte C und verlasse es im Punkte D'. Da nach unserer Annahme auch der Punkt Q aberrationsfrei abgebildet wird im Punkte Q', so muß dieser Strahl nach der Brechung durch Q' gehen. Den Strahl $B'P'$ möge er in E', die optische Achse in G' schneiden. Endlich fällen wir noch von den Punkten P und P' die Lote PR und $P'R'$ auf den Strahl QQ'. Aus der Figur 33 folgt dann:

$$[PE'] + [E'P'] = p\,,$$
$$[QE'] + [E'Q'] = q = p - n\,dx + n'\,dx'\,.$$

Das Stückchen PR stellt sich — da auf ihm die beiden von E' ausgehenden Strahlen $E'B'AP$ und $E'D'CR$ normal stehen — dar als unendlich kleines Stückchen der von E' sich ausbreitenden Wellenfläche. Da für alle Punkte dieser Wellenfläche die optische Länge vom Punkte E' aus gerechnet konstant sein muß, so ist

$$[RE'] = [PE'],$$

oder, was gemäß Figur 33 dasselbe ist:

$$[RQ] + [QE'] = [PE']. \tag{166}$$

Weiter folgt aus der Figur, daß

$$[E'Q'] - [Q'R'] = [E'R']$$

ist, oder da Dreieck $E'P'R'$ ein unendlich schmales gleichschenkliges Dreieck und somit

$$[E'R'] = [E'P']$$

ist:

$$[E'Q'] - [Q'R'] = [E'P']. \tag{167}$$

Durch Addition der beiden Gleichungen (166) und (167) findet man:

$$[RQ] + [QE'] + [E'Q'] - [Q'R'] = [PE'] + [E'P'], \tag{168}$$

wofür man auch schreiben kann

$$[RQ] + p - n\,dx + n'\,dx' - [Q'R'] = p$$

oder

$$[RQ] - n\,dx = [R'Q'] - n'\,dx'. \tag{169}$$

Diese Gleichung, welche zunächst zwischen unendlich kleinen Größen besteht, kann man auf endliche Größen transformieren.

Nach Figur 33 ist aus dem rechtwinkligen Dreiecke RPQ

$$\sphericalangle RPQ = 90^{0} - (\varphi - u),$$

also ist:

$$\sin(90^{0} - [\varphi - u]) = \frac{RQ}{\varrho}$$

oder

$$RQ = \varrho \cos(\varphi - u)$$

und

$$[RQ] = n\varrho \cos(\varphi - u). \tag{170}$$

Analog ergibt die Betrachtung des rechtwinkligen Dreiecks $R'P'Q'$, wenn $P'S'$ normal auf LL' steht und $\sphericalangle T'P'Q' = \varphi'$ ist,

$$\sphericalangle Q'P'R' = \sphericalangle Q'P'S' + \sphericalangle S'P'R'$$

$$\sphericalangle Q'P'R' = 90^0 - \varphi' + u',$$

also:

$$\sin Q'P'R' = \sin[90^0 - (\varphi' - u')] = \frac{Q'R'}{\varrho'},$$

woraus folgt:

$$Q'R' = \varrho' \cos(\varphi' - u')$$

und

$$[Q'R'] = n' \varrho' \cos(\varphi' - u') . \tag{171}$$

Berücksichtigt man noch:

$$\begin{cases} dx = \varrho \cos\varphi , \\ dx' = \varrho' \cos\varphi', \end{cases} \tag{172}$$

so wird Gleichung (169) unter Benutzung der Gleichungen (170) bis (172):

$$n \varrho \cos(\varphi - u) - n \varrho \cos\varphi = n' \varrho' \cos(\varphi' - u') - n' \varrho' \cos\varphi'$$

oder nach einigen Transformationen:

$$n \varrho [\cos(\varphi - u) - \cos\varphi] = n' \varrho' [\cos(\varphi' - u') - \cos\varphi'] \tag{173a}$$

oder:

$$n \varrho \sin\frac{2\varphi - u}{2} \sin\frac{u}{2} = n' \varrho' \sin\frac{2\varphi' - u'}{2} \sin\frac{u'}{2} . \tag{173b}$$

Hat eine Größe A nach der Brechung durch ein System den Wert A' angenommen, so setzt man nach einer von Abbe in die geometrische Optik eingeführten Bezeichnungsweise allgemein

$$A' - A = \Delta(A) .$$

Unter Anwendung dieser Schreibweise nehmen die Gleichungen (173a) und (173b) die Gestalt an:

$$\Delta[n \varrho \cos(\varphi - u)] = \Delta(n \varrho \cos\varphi) \tag{174a}$$

und

$$\Delta\left(n \varrho \sin\frac{2\varphi - u}{2} \sin\frac{u}{2}\right) = 0 . \tag{174b}$$

Dies ist die allgemeinste Bedingung für die aberrationsfreie Abbildung eines Punktpaares, von dem der eine Punkt auf der Achse selbst, der andere um die unendlich kleine Strecke ϱ entfernt liegt, wobei φ der Winkel ist, unter dem ϱ zur Achse geneigt ist.

§ 67. Die Sinusbedingung.

Wir betrachten zunächst den für die photographische Optik wichtigsten Fall, daß die beiden in Frage kommenden Punkte senkrecht übereinander liegen, der Winkel φ also gleich 90^0 wird. Die Strecke ϱ wird dann identisch mit einem kleinen achsensenkrechten Objekte, dessen Länge wir früher mit y bezeichnet haben.

Gleichung (174a) liefert dann:

$$\Delta (n y \sin u) = 0$$

oder

$$\frac{\sin u}{\sin u'} = \frac{n'}{n} \cdot \frac{y'}{y} \tag{175}$$

oder, wenn wir noch die Vergrößerung

$$\beta = \frac{y'}{y}$$

einführen:

$$\frac{\sin u}{\sin u'} = \frac{n'}{n} \beta\,. \tag{176}$$

Die durch die Gleichungen (175) und (176) dargestellte Beziehung heißt die „Sinusbedingung“. Da diese Beziehung wegen der Symmetrie des Systemes um die Achse herum für jeden Hauptschnitt besteht, falls sie für einen einzigen Hauptschnitt gültig ist, so stellt sie die Forderung dar, welche erfüllt sein muß, damit ein bei P (Fig. 33) befindliches achsensenkrechtes Flächenelement aberrationsfrei durch das System mit endlicher Öffnung abgebildet wird. Erscheint die Öffnung des Systemes von P aus unter einem Winkel $2\,U$, so muß Gleichung (176) erfüllt sein für alle Winkel von $u = 0$ bis $u = U$.

§ 68. Fall eines sehr entfernten Objektes.

Für die photographische Optik ist der Fall besonders wichtig, daß das abzubildende Flächenelement unendlich weit entfernt ist. Alsdann müssen wir jedoch die Gleichung (176) einer Transformation unterziehen.

Zu dem Zwecke betrachten wir Figur 34, wo P und P' zwei konjugierte Punkte sind, für die die Sinusbedingung erfüllt sein soll. Ferner legen wir durch den vorderen Brennpunkt F des Systemes

Fig. 34.

eine achsensenkrechte Ebene, wodurch für einen von P unter der beliebigen Neigung u ausgehenden Strahl die fokale Schnitthöhe h entsteht. Da $PF = x$ ist, erhalten wir:

$$\operatorname{tg} u = \frac{h}{x}, \tag{177}$$

und außerdem ist nach Gleichung (28), S. 27:

$$\frac{1}{\beta} = \frac{x}{f}. \tag{178}$$

Ferner setzen wir noch $n = n'$, wodurch auch $f = f'$ wird. Wandert jetzt P nach links ins Unendliche, so wird der Winkel u so klein, daß wir seine Tangente mit dem Sinus vertauschen können, und Gleichung (177) gibt

$$\sin u = \frac{h}{x}. \tag{179}$$

Setzt man die Werte für β und $\sin u$ aus (178) und (179) in Gleichung (176) ein, so erhält man

$$\sin u' = \frac{h}{f}. \tag{180}$$

Ist jetzt (Fig. 35) VW irgend ein von dem unendlich fernen Punkte P herkommender Strahl und verlängern wir denselben, bis er

Fig. 35.

den zugehörigen nach F' gerichteten gebrochenen Strahl in K schneidet, und fällen schließlich noch das Lot KL auf die Achse, so wird, da jetzt $\sphericalangle KF'L = u'$ und $KL = h$ ist:

$$\sin u' = \frac{h}{KF'},$$

woraus durch Vergleich mit Formel (180) folgt:

$$KF' = f. \tag{181}$$

Hieraus folgt, daß in einem photographischen Objektiv dann der Sinusbedingung genügt ist, wenn die Schnittpunkte aller achsenparallel einfallenden Strahlen mit den zugehörigen gebrochenen Strahlen auf einer Kugel liegen, die man mit dem Radius gleich der Systembrennweite f um den hinteren Brennpunkt schlägt.

Die genaue Erfüllung der Sinusbedingung ist sehr kritisch, zumal die Vorbedingung, Aufhebung der sphärischen Aberration für den Achsenpunkt, niemals streng für die ganze Öffnung erfüllt ist. Bei vollständiger Erfüllung der Sinusbedingung müßte gemäß Gleichung (180) der Ausdruck

$$\frac{h}{\sin u'} - f \tag{182}$$

streng der Null gleich sein. Infolge der vorhandenen Abweichungen wird dieser Ausdruck für verschiedene Einfallshöhen verschiedene, mehr oder weniger von Null abweichende Werte zeigen, die man als „Fehler gegen die Sinusbedingung“ bezeichnet.

Um eine Vorstellung zu geben, innerhalb welcher Grenzen sich bei einem gut korrigierten Objektiv die Abweichungen halten, wählen wir das von H. Harting errechnete Apochromat-Kollinear. Unter

der Voraussetzung einer Brennweite gleich 100 zeigt die beistehende kleine Tabelle die in Frage kommenden Größen für verschiedene Schnitthöhen h:

$$f = 100\,.$$

Schnitthöhe h	Aberration	$\frac{h}{\sin u'} - f$
0	0,00	0,00
1	− 0,01	− 0,01
2	− 0,06	− 0,07
3	− 0,14	− 0,15
4	− 0,15	− 0,18
5	− 0,05	− 0,10
5,56	+ 0,17	+ 0,06

§ 69. Graphische Darstellung der sphärischen Aberration und der Abweichung von der Sinusbedingung.

Die Aufhebung der sphärischen Aberration und die Erfüllung der Sinusbedingung wird bei photographischen Objektiven in erster Linie für unendlich ferne Objekte, d. h. für achsenparallel einfallende Strahlen angestrebt. Dabei bedient man sich zweckmäßig der graphischen Darstellung. Für eine bestimmte Anzahl (etwa drei) vorher angenommene Einfallshöhen werden achsenparallele Strahlen durch das System gerechnet (vgl. § 13) und ihre Schnittweiten auf der Achse bestimmt. Bei dieser Gelegenheit ergeben sich auch die Winkel u', welche diese Strahlen mit der Achse bilden.

In Figur 36 sind die drei achsenparallel einfallenden Strahlen I, II, III gezeichnet und nach rechts über das System hinaus verlängert. Der hintere Brennpunkt F' ist der Schnittpunkt eines Paraxialstrahles, während die Strahlen I, II, III nach der Brechung die Achse entsprechend in I', II', III' schneiden. In den letzteren Punkten errichtet man nun Lote zur Achse, welche die zugehörigen nach rechts verlängerten einfallenden Strahlen in den Punkten I'', II'', III'' schneiden. Legt man dann durch diese Punkte und durch F' eine Linie, so hat man die sogenannte „Aberrationskurve“, welche ein Bild vom Verlaufe der Aberration gibt. Die Aberrationsgrößen selbst sind die Strecken $F'I'$, $F'II'$, $F'III'$. Dieselben spielen die Rolle von

Abszissen, wenn man den Punkt F' als Koordinatenanfangspunkt wählt. Trägt man an Stelle der Aberrationsgrößen die Größe $\frac{h}{\sin u'} - f$ auf und errichtet die zugehörigen Lote, so erhält man die Kurve für die Abweichung von der Sinusbedingung. In Figur 36

Fig. 36.

soll diese Kurve durch die gestrichelte Linie dargestellt sein. Diese Kurvendarstellung ist in dem Werke: Theorie und Geschichte des photographischen Objektives von M. v. Rohr, Berlin 1899 zur Darstellung des Korrektionszustandes einer großen Anzahl von Objektiven verwandt.

§ 70. Die Herschelsche Bedingung.

Setzt man in Gleichung (174b) $\varphi = 0$, so liegen die beiden in Frage kommenden Punkte auf der Achse, und wir erhalten als Bedingung dafür, daß beide Punkte aberrationsfrei durch das System abgebildet werden:

$$n \varrho \sin^2 \frac{u}{2} = n' \varrho' \sin^2 \frac{u'}{2}. \tag{183}$$

Figur 33 lehrt nun, daß in diesem Falle die Strecken ϱ und ϱ' in PT und $P'T'$ übergehen, wo PT, da es im Objektraume von P aus im Sinne der Lichtbewegung sich erstreckt, negativ in Rechnung zu bringen ist, so daß man also hat:

$$\frac{\varrho'}{\varrho} = -\frac{dx'}{dx}. \tag{183a}$$

Aus der Gleichung $x x' = f f'$ folgt durch Differentiation:

$$x\, dx' + x'\, dx = 0$$

oder

$$\frac{dx'}{dx} = -\frac{x'}{x}. \tag{184}$$

Multipliziert man die beiden Gleichungen

$$\beta = \frac{f}{x} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{x'}{f'}$$

(vgl. Gleichung I, § 22) miteinander, so wird:

$$\beta^2 = \frac{f}{f'} \cdot \frac{x'}{x} = \frac{n}{n'} \cdot \frac{x'}{x}.$$

Unter Berücksichtigung dieser Gleichung und der Gleichungen (183,) (183a) und (184) erhält man dann:

$$\frac{\sin\frac{u'}{2}}{\sin\frac{u}{2}} = \frac{n}{n'} \cdot \frac{1}{\beta}, \tag{185}$$

welche als „Herschelsche Bedingung“ bezeichnet wird.

Ihre Wirkung auf das optische System beruht darin, daß der Korrektionszustand des Bildes in erster Annäherung unabhängig ist von der Entfernung des Objektes. Ein photographisches Objektiv, das für entfernte Objekte sphärisch korrigiert ist und das außerdem die Herschelsche Bedingung erfüllt, würde also diesen guten Korrektionszustand auch noch beibehalten, wenn man die Mattscheibe auf näher gelegene Punkte einstellte.

Um die Gleichung (185) auf den Fall sehr entfernter Objekte umzuformen, dienen ganz analoge Betrachtungen, wie wir sie im § 68 angestellt haben.

Man findet als Bedingung:

$$\sin\frac{u'}{2} = \frac{h}{2f}, \tag{186}$$

und als „Abweichung von der Herschelschen Bedingung“ würde die Größe

$$\frac{h}{2\sin\frac{u'}{2}} - f \tag{187}$$

aufzufassen sein, die dem Ausdruck (182) entspricht.

Niemals kann ein optisches zentriertes System von endlicher Öffnung und endlicher Brennweite gleichzeitig der Herschelschen und der Sinusbedingung genügen, wodurch auch die Unmöglichkeit der aberrationsfreien Abbildung eines Volumenelementes erwiesen ist.

Bemerken wollen wir hier schon, daß die sogenannten aplanatischen Punkte der Kugelfläche aberrationsfrei sind und der Sinusbedingung, nicht aber der Herschelschen Bedingung Genüge leisten.

Abbe hat für Punkte ohne Aberration, die außerdem der Sinusbedingung genügen, die Bezeichnung „Aplanatische Punkte“ eingeführt.

Kapitel 8.

Der Astigmatismus.

§ 71. Entwicklung der Gleichung der Wellenfläche in eine unendliche Reihe.

Wir kehren wieder zurück zu den Betrachtungen der §§ 60, 61 und wollen das allgemeine Problem der Fortbewegung der Lichtwelle jetzt noch nach einer anderen Richtung hin spezialisieren. Wir erinnern noch einmal daran, daß die Normalen der Wellenfläche die Lichtstrahlen sind. Denken wir uns die Wellenfläche zu einer gewissen Zeit t gegeben, und denken wir uns sämtliche Normalen dieser Fläche konstruiert und jede einzelne bis ins Unendliche verlängert, so haben wir damit ein sehr anschauliches Bild von der Bewegung der Wellenfläche, und zwar von der Zeit t bis zur Zeit $t = \infty$, gewonnen. Wir denken uns nämlich die Wellenfläche sich so fortbewegend, daß sie auf dem System der gegebenen Normalen beständig senkrecht steht. Die Wellenfläche nimmt dann besonders in der Nähe der schon im § 61 erwähnten Mittelpunkte X_1 und X_2 der beiden Hauptkrümmungen sehr auffallende Formen an, deren Darstellung schon des öfteren Gegenstand der Bemühungen der Mathematiker und Physiker war. Eine exakte Darstellung des ganzen Verlaufes der Wellenfläche ist, wie schon erwähnt, wegen der mathematischen Schwierigkeiten ausgeschlossen. Man war deshalb gezwungen, nicht die Wellenfläche in ihrer ganzen Ausdehnung zu betrachten, sondern einen Teil davon abzugrenzen, ein Weg, den L. Matthiessen und Gullstrand mit besonderem Erfolge betreten haben.

Nehmen wir an, die Wellenfläche sei in der Form $z = \psi(x, y)$ gegeben, so kann man bekanntlich z nach dem Lehrsatz von MacLaurin in eine unendliche Reihe entwickeln und erhält:

$$(188) \quad \left\{ \begin{aligned} z = \psi(0) &+ x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{x^2}{1\cdot 2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{xy}{1\cdot 2}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} \\ &+ \frac{y^2}{1\cdot 2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + \frac{3x^2 y}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y} \\ &+ \frac{3xy^2}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} + \frac{y^3}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} + \cdots \end{aligned} \right.$$

Nach dem Vorgange von **Gullstrand** können wir die Reihe mit dem Gliede, welches die dritten Potenzen der Variabeln x und y enthält, abbrechen und die höheren Potenzen vernachlässigen. Wir erhalten dann anstatt der Wellenfläche eine Fläche dritten Grades, die in der Nähe des Punktes (x, y, z) mit der Wellenfläche eine Berührung dritter Ordnung bildet. Betrachtet man also nur ein entsprechend kleines Stück der den Raum durcheilenden Wellenfläche, so kann man die letztere durch jene Fläche dritten Grades ersetzen. Mit dem soeben angegebenen Grade der Annäherung hat **Gullstrand***) den Strahlengang, und zwar insbesondere in der Anwendung auf das menschliche Auge, dargestellt. So interessant auch seine Resultate sind, müssen wir doch hier von einer Darstellung derselben absehen, da sie für die photographische Optik zurzeit noch keine Verwendbarkeit beanspruchen können. Wir beschränken uns darauf, die Reihe der Gleichung (188) mit den quadratischen Gliedern abzubrechen.

Legen wir jetzt die Z-Achse in die Hauptnormale des Punktes Q (Fig. 37) und lassen die xy-Ebene Tangentialebene an der Fläche $z = \psi$ im Punkte Q werden und zwar so, daß die x- und y-Achse Tangenten an die s_1- und s_2-Linie im Punkte Q werden, bezeichnen wir ferner die beiden Hauptkrümmungsradien im Punkte Q, d. h. die Strecken QX_1 und QX_2 mit ϱ_1 und ϱ_2, so lehrt die Geometrie, daß folgende Beziehungen bestehen:

$$\psi(0) = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} = 0 ,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{\varrho_1} , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{\varrho_2} ,$$

und die Gleichung (188) wird:

$$z = \frac{x^2}{2\,\varrho_1} + \frac{y^2}{2\,\varrho_2} . \tag{189}$$

Dies ist die Gleichung eines sogenannten elliptischen Paraboloides, und wir haben den Satz: **In erster Annäherung kann man die Wellenfläche als ein elliptisches Paraboloid auffassen.** Diese Annahme gilt also, wenn man nur ein unendlich kleines, senkrecht zur Hauptnormale sich fortbewegendes Wellenstück in Betracht zieht. Der

*) Skandinav. Archiv für Physiologie 2, 1891. In der neueren Arbeit desselben Autors (Nova acta regiae soc. Ups. scient. Ser. III. Vol. XX. 1901) werden sogar erst die fünften Potenzen in der Reihe von **Mac-Laurin** vernachlässigt.

Ersatz einer beliebigen Fläche an einer bestimmten Stelle durch ein sich anschmiegendes elliptisches Paraboloid ist zuerst von Dupin in die Geometrie eingeführt, und wir können uns jetzt auf der Stufe dieser Annäherung eine sehr anschauliche Vorstellung von der Fortbewegung eines Wellenflächenstückes machen.

§ 72. Das unendlich dünne astigmatische Strahlenbündel.

Sei in Figur 37 Q der Anfangspunkt des Systemes und $Q X_1 X_2$ die Z-Achse, während, wie oben angenommen, die xy-Ebene die Wellenfläche in Q tangiert. Wenn sich nun das kleine Stück $\beta \beta' \gamma \gamma'$ der Wellenfläche in Richtung der Z-Achse bewegt, so bewegen sich die Punkte β, β' nach X_2, die Punkte γ, γ' nach X_1 hin. Wir

Fig. 37.

wollen uns jetzt vorstellen, daß sich der Koordinatenanfangspunkt mit der Wellenfläche auf der Z-Achse fortbewegt, dann stellt Gleichung (189) in jedem Augenblicke die Wellenfläche dar; es ändern sich nur die Konstanten ϱ_1 und ϱ_2. Nach der von uns gebrauchten Vorstellungsweise kann man den Bogen $\gamma \gamma'$ wie einen Bogen eines Kreises ansehen, der um X_1 als Mittelpunkt geschlagen ist, da ja

$$Q X_1 = \gamma X_1 = \gamma' X_1 = \varrho_1$$

ist, während analog $\beta \beta'$ einem Kreise angehört, der um X_2 mit dem Radius ϱ_2 geschlagen ist. In Beziehung auf Gleichung (189) liegt hierin die Annahme, daß wir für die Parabeln, welche die xz- und yz-Ebene aus dem elliptischen Paraboloid herausschneiden, deren Krümmungskreise substituieren können. Das soeben geschilderte Verhalten behält die Wellenfläche auf ihrem Wege bei. Ist das in Frage kommende Stück zum Beispiel in die Lage $\beta_1 \beta_1' \gamma_1 \gamma_1'$ (Fig. 37) übergegangen, so sind immer noch $\gamma_1 \gamma_1'$ und $\beta_1 \beta_1'$ Teile von Kreisen mit

den Mittelpunkten X_1 und X_2. In konsequenter Festhaltung dieser Vorstellung ergibt sich nun folgendes.

Wir stellen uns vor, das kleine Flächenstück eilt, geführt von den Normalen, auf denen es senkrecht steht, in der Richtung des Pfeiles vorwärts. Dabei zieht es sich immer mehr und mehr zusammen, wird immer kleiner und kleiner und geht im Punkte X_1 schließlich über in ein auf der Hauptnormale senkrecht stehendes Kreisbogenelement $\delta\delta'$, welches auch normal zur Zeichnungsebene steht und in X_2 seinen Mittelpunkt hat. Bei X_1 angelangt, ist also die gesamte Lichtenergie in diesem Elemente zusammengedrängt. Aus diesem eigentümlichen Zustande der Konzentration breitet sich das Licht wieder zu elliptischen Querschnitten aus. Diese werden immer schmaler und länger, bis das Wellenstückchen im Punkte X_2 wieder zu einem auf der Hauptnormale senkrechten Kreisbogenelement $\lambda\lambda'$ degeneriert, welches in der Zeichnungsebene gelegen ist und seinen Mittelpunkt in X_1 hat. Von dort an nimmt das Wellenstückchen dann wieder elliptische Querschnitte an und breitet sich nun immer mehr und mehr aus. Die beiden kleinen Kreisbögen $\delta\delta'$ und $\lambda\lambda'$ nennt man die beiden Brennlinien.

§ 73. Kreis kleinster Verwirrung.

Am meisten interessiert uns an diesem Wellengange der zwischen den beiden astigmatischen Bildpunkten X_1 und X_2 gelegene Teil. Innerhalb dieser Region betrachten wir (Fig. 37) das Wellenstück in einer bestimmten Lage $\varepsilon\varepsilon'\eta\eta'$ mit dem Mittelpunkte Q' und den beiden Hauptkrümmungsrichtungen $\varepsilon\varepsilon'$ und $\eta\eta'$. Der Krümmungshalbmesser der ersten Richtung ist die Strecke

$$X_1 Q' = \varrho_1 ,$$

der der zweiten ist

$$X_2 Q' = \varrho_2 ,$$

wo jetzt, da sich die Welle fortbewegt hat, ϱ_1 und ϱ_2 entsprechend andere Werte haben als im vorigen Paragraphen.

Da das fortschreitende Wellenflächenstück unendlich klein und dementsprechend das zugehörige durch die Normalen zur Wellenfläche dargestellte Bündel als unendlich dünn betrachtet werden kann, so können wir, so lange es uns nicht um die Feststellung der Krümmung zu tun ist, die Strecken $\varepsilon\varepsilon'$ und $\eta\eta'$ als kleine geradlinige Elemente

auffassen. Der Querschnitt des Wellenstückchens an dieser Stelle wird wieder die Form einer Ellipse haben, deren Durchmesser seien

$$\varepsilon\,\varepsilon' = a\,,$$
$$\eta\,\eta' = b\,.$$

Endlich sei noch der Winkel, welchen die beiden von γ und γ' ausgehenden Normalen miteinander bilden, gleich φ_1 und der, den die beiden von β und β' ausgehenden Normalen miteinander bilden, gleich φ_2; dann folgt zunächst die Länge der beiden Brennlinien in den Punkten X_1 und X_2 (Fig. 37), wenn man $X_1 X_2 = \varDelta$ setzt,

$$\left\{\begin{aligned} \delta\,\delta' &= \varDelta\,\varphi_2\,, \\ \lambda\,\lambda' &= \varDelta\,\varphi_1\,, \end{aligned}\right. \tag{190}$$

und weiter ergibt sich für unser kleines Flächenstück $\varepsilon\,\varepsilon'\,\eta\,\eta'$

$$\left\{\begin{aligned} a &= \varrho_1\,\varphi_1\,, \\ b &= \varrho_2\,\varphi_2\,, \\ \varrho_1 + \varrho_2 &= \varDelta\,. \end{aligned}\right. \tag{191}$$

Man hat nun von allen diesen zwischen X_1 und X_2 liegenden Flächenstücken demjenigen die größte Aufmerksamkeit geschenkt, für das der elliptische Querschnitt in einen Kreis übergeht, d. h. für welches

$$a = b$$

wird. Dann erhält man:

$$\left\{\begin{aligned} \varrho_1\,\varphi_1 &= \varrho_2\,\varphi_2\,, \\ \varrho_1 + \varrho_2 &= \varDelta\,. \end{aligned}\right. \tag{192}$$

Aus diesen beiden Gleichungen kann man die Entfernungen ϱ_1 und ϱ_2 des Flächenstückes von den beiden astigmatischen Bildpunkten X_1 und X_2 berechnen. Es ergibt sich

$$\left\{\begin{aligned} \varrho_1 &= \frac{\varDelta\,\varphi_2}{\varphi_1 + \varphi_2}\,, \\ \varrho_2 &= \frac{\varDelta\,\varphi_1}{\varphi_1 + \varphi_2}\,. \end{aligned}\right. \tag{193}$$

Man hat diesen kreisförmigen Querschnitt den **Kreis der kleinsten Verwirrung** genannt und ihn, jedoch wohl kaum mit Recht, als das Äquivalent eines fehlenden Konvergenzpunktes aller Bündelstrahlen angenommen.

§ 74. Der Pol des Bündels.

Wir wollen (Fig. 37) noch diejenige Stelle zwischen X_1 und X_2 aufsuchen, welche den größten Querschnitt hat. Wir nennen sie den Pol des Bündels und gelangen zu ihr durch folgende Überlegungen.

Der Inhalt eines ganz beliebigen Querschnittes unseres Bündels ist, wenn π die Ludolphsche Zahl bedeutet:

$$f = \pi a b \tag{194}$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (191)

$$f = \pi \varphi_1 \varphi_2 \varrho_1 \varrho_2 \tag{195}$$

oder

$$f = \pi \varphi_1 \varphi_2 (\varDelta \varrho_1 - \varrho_1^2), \tag{196}$$

wo außer π für dasselbe Strahlenbündel stets $\varDelta$, φ_1, φ_2 Konstante sind. Bildet man aus (196): $\frac{df}{d\varrho_1} = 0$, so findet man $\varrho_1 = \frac{\varDelta}{2}$, wodurch die Lage des Poles — in der Mitte zwischen X_1 und X_2 — bestimmt ist. Bis zu dieser Stelle geht das Lichtbündel von kleineren zu größeren Querschnitten über, verliert also an Intensität, während es jenseits derselben sich zu kleineren Querschnitten einengt, was einer Lichtkonzentration entspricht.

Anmerkung. Wenn wir in der Ebene eine Kurve haben mit dem Kurvenelemente $AB = ds$, und wir errichten in A und B Normalen, so schneiden sich diese in einem Punkte C und bilden miteinander den sogenannten Kontingenzwinkel. Schlagen wir um den Punkt C mit dem Radius $r = 1$ einen Kreis, so ist das zwischen den beiden Normalen liegende Stück des Kreises $d\sigma$ bestimmt durch die Gleichung

$$ds : d\sigma = \varrho : 1,$$

wenn ϱ den Krümmungsradius an der betreffenden Stelle darstellt. Die Krümmung der Kurven stellt sich jetzt dar durch den Ausdruck:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{d\sigma}{ds}.$$

Es ist nun das Verdienst von Gauß, gezeigt zu haben, daß man genau dieselben Betrachtungen auch auf Flächen übertragen kann. Doch tritt hier die Schwierigkeit auf, daß sich die von dem Flächenelemente ausgehenden Normalen nicht mehr in einem Punkte schneiden, sondern sich kreuzen. Diese Schwierigkeit beseitigt Gauß, indem er sämtliche Normalen zieht und sie dann parallel mit sich selbst nach einem beliebigen Punkte im Raume verschiebt und um diesen Punkt eine Kugel vom Radius 1 beschreibt. Aus dieser Kugel schneidet dann der von sämtlichen Normalen gebildete Kegel

ein Flächenelement $d\sigma$ heraus, und die Krümmung der Fläche ist wieder definiert durch

$$\varkappa = \frac{d\sigma}{ds},$$

eine Größe, die man als das Gaußsche Krümmungsmaß bezeichnet.

Wie Gauß gezeigt hat, ist das Krümmungsmaß $\varkappa$ eines Flächenstückes gleich dem reziproken Werte des Produktes der beiden Hauptkrümmungsradien. Wenden wir dies an auf unser fortlaufendes Wellenstück, so ist das Krümmungsmaß für jeden Querschnitt

$$\varkappa = \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} \tag{197}$$

oder mit Rücksicht auf Gleichung (195)

$$\varkappa = \frac{\pi \varphi_1 \varphi_2}{f}. \tag{198}$$

Wir sehen also, daß das Gaußsche Krümmungsmaß umgekehrt proportional dem Flächeninhalte des Querschnittes des Bündels ist. Da in den beiden astigmatischen Bildpunkten der Flächeninhalt gleich Null wird, so muß hier das Krümmungsmaß unendlich groß sein, während das Flächenstück am Pole das kleinste Krümmungsmaß hat, da ja der Inhalt des Flächenstückes am Pole ein Maximum ist.

§ 75. Strahlendichte.

Das Licht, welches sich auf der Wellenfläche befindet, ist von einem Punkte P des Objektraumes ausgegangen. Das Licht, welches sich auf dem Wellenflächenstücke f befindet, wird einem unendlich dünnen, von P ausgehenden Strahlenkegel angehören. Schlägt man um P eine Kugel mit dem Radius 1, aus deren Oberfläche dieser Kegel ein Flächenstück w herausschneidet, so ist bei der Bewegung des Lichtes längs eines das System durchdringenden Bündels dasselbe Lichtquantum einmal auf w, das andere Mal auf f ausgebreitet. Der Quotient $\frac{w}{f}$ gibt also an, in welchem Maße das Licht gesammelt oder zerstreut ist, je nachdem nämlich f kleiner oder größer als w ist. Wir nennen deshalb diesen Quotienten die Strahlendichte S und schreiben unter Berücksichtigung von Gleichung (198):

$$S = \frac{w}{f} = \frac{w}{\pi \varphi_1 \varphi_2} \cdot \varkappa$$

oder, da für ein Bündel innerhalb des Verlaufes in demselben Medium die Größen φ_1 und φ_2 konstant sind,

$$S = \mathrm{const} \cdot \varkappa \,. \tag{199}$$

Die Strahlendichte an irgend einer Stelle der Wellenfläche ist also dem dort herrschenden Gaußschen Krümmungsmaß proportional.

§ 76. Anschauliches und rationelles System.

Wir haben bisher immer von den Scheiteln der brechenden Flächen ausgehend, im Objektraume die Schnittweiten nach links und im Bildraume die Schnittweiten nach rechts hin positiv gerechnet, haben also entgegengesetzte Richtungen mit gleichem Vorzeichen versehen. Diese Zählweise ist sehr anschaulich und besonders für die zeichnerische Darstellung geeignet. Für manche Zwecke, insbesondere für eine systematische Durchrechnung, empfiehlt es sich jedoch, die Schnittweiten sowohl vor wie nach der Brechung an den einzelnen Flächen in Lichtrichtung positiv zu zählen (rationelle Zählweise).

Wir haben im § 13 das Formelsystem zur Durchrechnung eines paraxialen Strahles durch ein beliebiges System angegeben. Wir hatten es dort aufgeschrieben für nur drei Flächen, hatten aber darauf hin-

Fig. 38.

gewiesen, daß es für beliebig viele brechende Flächen gilt. Wenn es sich z. B. (Fig. 38) um die $(\varkappa-1)^{\text{te}}$ und die $\varkappa^{\text{te}}$ Fläche handeln würde, so wären die erforderlichen Formeln:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{n_{\varkappa-1}}{a_{\varkappa-1}} + \frac{n'_{\varkappa-1}}{a'_{\varkappa-1}} &= \frac{n'_{\varkappa-1}-n_{\varkappa-1}}{r_{\varkappa-1}} \\ \frac{n_{\varkappa}}{a_{\varkappa}} + \frac{n'_{\varkappa}}{a'_{\varkappa}} &= \frac{n'_{\varkappa}-n_{\varkappa}}{r_{\varkappa}} \end{aligned}\right. \qquad a'_{\varkappa-1} + a_{\varkappa} = d_{\varkappa-1}\,. \tag{200}$$

Dieses System würde gelten unter Voraussetzung eines anschaulichen Systemes. Es fragt sich, wie gestaltet es sich um für ein rationelles System?

Im anschaulichen Systeme hatten wir sowohl die Strecken

$$S_{\varkappa-1}P_{\varkappa} = a'_{\varkappa-1}$$

und

$$S_{\varkappa}P_{\varkappa+1} = a'_{\varkappa} ,$$

als auch die Strecken

$$S_{\varkappa-1}P_{\varkappa-1} = a_{\varkappa-1}$$

und

$$S_{\varkappa}P_{\varkappa} = a_{\varkappa}$$

positiv angenommen. Im rationellen Systeme müssen wir die Strecken

$$S_{\varkappa-1}P_{\varkappa-1} = a_{\varkappa-1}$$

und

$$S_{\varkappa}P_{\varkappa} = a_{\varkappa} ,$$

da sie entgegengesetzt der Lichtbewegung sind, negativ in Rechnung bringen. Wollen wir die neuen Verhältnisse zeichnerisch darstellen, so müssen wir uns von vornherein vorstellen, daß der Punkt $P_{\varkappa}$ nicht links, sondern rechts von der Fläche $S_{\varkappa}$ liegt, daß also das Licht nicht vom Punkte $P_{\varkappa}$ ausgeht, sondern nach ihm hingeht.

Im rationellen Systeme werden also die Schnittweiten, wenn wir, um jeder Verwechslung vorzubeugen, das Zeichen a durch c ersetzen:

$$a_{\varkappa-1} = -c_{\varkappa-1} , \quad a_{\varkappa} = -c_{\varkappa} ,$$
$$a'_{\varkappa-1} = c'_{\varkappa-1} , \quad a'_{\varkappa} = c'_{\varkappa} .$$

und die Formeln (200) gehen für das rationelle System über in

$$(201) \qquad \begin{cases} \dfrac{n'_{\varkappa-1}}{c'_{\varkappa-1}} - \dfrac{n_{\varkappa-1}}{c_{\varkappa-1}} = \dfrac{n'_{\varkappa-1} - n_{\varkappa-1}}{r_{\varkappa-1}} \\[2ex] \dfrac{n'_{\varkappa}}{c'_{\varkappa}} - \dfrac{n_{\varkappa}}{c_{\varkappa}} = \dfrac{n'_{\varkappa} - n_{\varkappa}}{r_{\varkappa}} \end{cases} \qquad c_{\varkappa} = c'_{\varkappa-1} - d_{\varkappa-1} .$$

Der Ausdruck für die Brennweite [Gleichung (42) in § 25] wird, wenn wir vom Vorzeichen absehen, für $\varkappa$ Flächen unter Benutzung der neuen Bezeichnungen:

$$(201\,a) \qquad f = \frac{n_1}{n'_{\varkappa}} \frac{c'_1 \cdot c'_2 \ldots c'_{\varkappa}}{c_2 \cdot c_3 \ldots c_{\varkappa}} .$$

Der Fortschritt des rationellen Systemes zeigt sich, wenn wir die Gleichungen (201) noch etwas umformen. Da die Gleichungen für jede beliebige Fläche bestehen, so wollen wir von den Indizes absehen. Man sieht sofort, daß man immer auf die Form

$$(202) \qquad n'\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{c'}\right) = n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{c}\right)$$

kommen kann. In dieser Form sind die Gleichungen sehr übersichtlich. Bedenkt man, daß r als Radius der brechenden Fläche sowohl dem Objektraume als auch dem Bildraume angehört, so gehören die Größen auf der rechten Seite dem Objektraume, die auf der linken dem Bildraume an. Der Ausdruck ist also vor und nach der Brechung ganz analog gebildet. Man hat ihn deshalb eine „optische Invariante" genannt und mit dem Symbole Q_0^I bezeichnet, so daß also

$$n'\left(\frac{1}{c'} - \frac{1}{r}\right) = n\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{r}\right) = Q_0^I = Q_c \tag{203}$$

ist. Der Index 0 drückt dabei aus, daß wir uns im paraxialen Gebiete befinden, und der Index I, daß es im Gegensatze zu einer später zu definierenden Invariante zweiter Ordnung die Invariante erster Ordnung ist. Die Größe Q_0^I bezeichnet man auch als „Nullinvariante" und schreibt dafür, wenn eine Verwechslung mit anderen Invarianten ausgeschlossen erscheint, Q_c oder auch, wenn sie für die $\varkappa^{\text{te}}$ Fläche gelten soll, $Q_{\varkappa c}$.

Es gibt noch mehrere optische Invarianten, von denen ein Beispiel gibt:

$$n \sin i = n' \sin i' = Q .$$

Hierhin gehört auch der Winkel φ, den das Einfallslot (der Radius) mit der optischen Achse bildet.

§ 77. Meridional- und Sagittalstrahlen.

Die oben gefundenen Eigenschaften, daß sich das Licht, welches von einem Punkte ausgeht, nach beliebig vielen Brechungen auf einer Lichtwelle ausbreitet, welche dadurch charakterisiert ist, daß auf ihr die optische Länge überall denselben Wert hat, daß diese Lichtwelle Normalen hat, welche durch die Lichtstrahlen dargestellt werden, daß ferner gewisse Strahlen eines Bündels die Eigenschaft haben, sich in zwei Punkten, nämlich im ersten und im zweiten Krümmungsmittelpunkte, zu schneiden, alle diese Eigenschaften werden wesentlich vereinfacht, wenn wir ein zentriertes optisches System voraussetzen, wie es bei photographischen Objektiven fast ausschließlich in Frage kommt. Wir wissen aus früheren Betrachtungen, daß es in jedem unendlich dünnen Bündel zwei Paare von Strahlen gibt in zwei aufeinander senkrechten Ebenen, welche sich nicht kreuzen, sondern schneiden. Diese Normalen zu finden und zwar unter Voraussetzung eines zentrierten Systemes, ist jetzt unsere Aufgabe.

Sei P im Objektraume ein leuchtender Punkt, so können wir durch ihn und die optische Achse des zentrierten Systemes stets eine Ebene legen; es ist dies der Hauptschnitt, der in unseren Figuren immer als mit der Zeichnungsebene zusammenfallend angenommen wird. In dieser Ebene lassen wir einen Strahl einfallen, er wird gebrochen und gelangt schließlich in den Bildraum. Lassen wir dann in derselben Ebene einen unendlich nahen Strahl einfallen, so ist dieser gezwungen, auch nach der Brechung noch in dieser Ebene zu bleiben, weil in diesem Falle nach dem Brechungsgesetze die Einfallsebene und die Brechungsebene stets mit dem Hauptschnitte zusammenfallen. Er kann also den ersten Strahl nicht kreuzen, sondern wird ihn in irgend einem Punkte P' schneiden. Wenn wir in der Hauptebene bleiben, so können wir also immer einen Punkt P' finden, in dem sich zwei Strahlen schneiden. Wir haben also in diesem Falle eines zentrierten Systemes das allgemeine Problem reduziert auf eine Aufgabe über den Strahlengang in einer Ebene. Den Punkt P' nennen wir den meridionalen oder tangentialen Bildpunkt und die in einem Hauptschnitte verlaufenden Strahlen Meridionalstrahlen. Nun ist es auch nicht mehr schwer, den anderen Schnittpunkt zu finden, da wir schon wissen, daß der Punkt in einer zum Hauptschnitte senkrechten Ebene liegen muß. Der letztere heißt „sagittaler Bildpunkt“ und die Strahlen, welche sich in ihm schneiden, „sagittale Strahlen“.

Das austretende Bündel hat also zwei Bildpunkte, deren Entfernung man astigmatische Differenz nennt. Fallen diese beiden Punkte zusammen, dann ist das Bündel frei von Astigmatismus und heißt „homozentrisch“.

§ 78. Die meridionalen Schnittweiten.

Wir wollen zunächst den meridionalen Bildpunkt untersuchen, den also zwei Strahlen miteinander bilden, welche in der Zeichnungsebene verlaufen. Dabei sei nochmals darauf hingewiesen, daß diese Untersuchungen nicht nur für das paraxiale Gebiet, sondern ganz allgemein gelten.

Wir nehmen eine brechende Kugelfläche an mit dem Mittelpunkte M und dem Radius r. Der leuchtende Punkt A muß, da wir uns jetzt der rationellen Zählweise bedienen, in der Figur 39 auf der rechten Seite der brechenden Fläche dargestellt werden. Die beiden Punkte, in denen das nach A hingehende unendlich dünne

Bündel die brechende Fläche schneidet, seien P und Q. Weiter setzen wir das Kreisbogenelement:

$$PQ = ds,$$

dann verbinden wir P und Q mit M und bezeichnen den Winkel zwischen diesen beiden Radien mit $d\varphi$. Weiter setzen wir die Schnittweite

$$QA = t$$

und fällen von Q das Lot QE auf den benachbarten Strahl AP. Der kleine Winkel, welchen die beiden Strahlen miteinander bilden, sei du. Der Winkel, welchen der einfallende Strahl PA mit dem Einfallslote — in diesem Falle mit dem Radius — bildet, also der Einfallswinkel, ist $\sphericalangle APM = i$, der Winkel, den der Strahl AQ mit dem zugehörigen Radius bildet, ist dann $\sphericalangle AQM = i + di$. Weiter ist $\sphericalangle PQE = i$, da seine Schenkel normal stehen auf den Schenkeln des Winkels i. Bezeichnen wir noch den Schnittpunkt von QM und AP mit K, so ist

Fig. 39.

$$\sphericalangle AKM = i + d\varphi,$$
$$\sphericalangle PKQ = i + di + du$$

als Außenwinkel, und da

$$\sphericalangle AKM = \sphericalangle PKQ$$

als Scheitelwinkel, so ergibt sich

$$d\varphi = di + du. \tag{204}$$

Weiter ist im Dreiecke PQE

$$QE = ds \cos i, \tag{205}$$

und in dem Dreiecke AQE ist

$$QE = t\, du. \tag{206}$$

Ferner ist

$$ds = QP = r\, d\varphi. \tag{207}$$

Die Gleichung (204) dividieren wir durch $d\varphi$, dann wird

$$1 = \frac{di}{d\varphi} + \frac{du}{d\varphi}, \tag{208}$$

wo übrigens $d\varphi$ eine optische Invariante ist. Aus Gleichung (205) und (206) ergibt sich

$$ds \cos i = t\, du\,, \tag{209}$$

und mit Rücksicht auf Gleichung (207) erhalten wir

$$r\, d\varphi \cos i = t\, du \tag{210}$$

oder

$$\frac{du}{d\varphi} = \frac{r \cos i}{t}\,. \tag{211}$$

Setzen wir das ein in Gleichung (208), so finden wir

$$\frac{r \cos i}{t} = 1 - \frac{di}{d\varphi} \tag{212}$$

oder

$$\frac{di}{r\, d\varphi} = \frac{1}{r} - \frac{\cos i}{t}\,. \tag{213}$$

Durch Multiplikation mit $n \cos i$ ergibt sich weiter

$$\frac{n \cos i\, di}{r\, d\varphi} = n \cos i \left(\frac{1}{r} - \frac{\cos i}{t}\right) \tag{214}$$

oder

$$n \cos i \left(\frac{1}{r} - \frac{\cos i}{t}\right) = \frac{d(n \sin i)}{r\, d\varphi}\,. \tag{215}$$

Wir stellen uns nun vor, der Punkt A sei der leuchtende Punkt, nach diesem gehen die Strahlen hin. Sie werden in Q und P gebrochen. Nach der Brechung müssen wir setzen

$$n' \text{ für } n\,,$$
$$i' \text{ für } i\,,$$
$$t' \text{ für } t\,.$$

Dagegen bleiben r und φ unverändert. Für das gebrochene Bündel können wir also sofort eine der Gleichung (215) entsprechende Gleichung aufstellen. Man erhält:

$$n' \cos i' \left(\frac{1}{r} - \frac{\cos i'}{t'}\right) = \frac{d(n' \sin i')}{r\, d\varphi}\,, \tag{216}$$

und unter Berücksichtigung des Brechungsgesetzes wird

$$n' \cos i' \left(\frac{1}{r} - \frac{\cos i'}{t'}\right) = \frac{d(n \sin i)}{r\, d\varphi}\,. \tag{217}$$

Aus Gleichung (215) und (217) folgt sofort:

$$n \cos i \left(\frac{1}{r} - \frac{\cos i}{t}\right) = n' \cos i' \left(\frac{1}{r} - \frac{\cos i'}{t'}\right) = Q^I. \tag{218}$$

Aus dieser Formel ist t' zu berechnen, wenn die Entfernung t des leuchtenden Punktes sowie der Einfalls- und der Brechungswinkel bekannt sind. Wir sehen, daß die Formel (218) uns wieder eine optische Invariante darstellt. Sie wird bezeichnet mit Q^I.

Es ist dieses die Grundbeziehung für den meridionalen Teil eines räumlichen Strahlenbündels. Wollen wir von unserer allgemeinen Formel (218) zu dem paraxialen Gebiete übergehen, so müssen wir den Einfalls- und Brechungswinkel sehr klein annehmen. Tun wir dies, so gelangen wir zu der Gleichung (203) S. 122 zurück.

Für den meridionalen Teil und überhaupt für das ganze räumliche Bündel gelten ähnliche Beziehungen wie in einem paraxialen Bündel. Man kann auch hier von der Abbildung eines Objektes sprechen, nur besteht ein großer Unterschied hinsichtlich der Vereinigung der Strahlen, indem hier ein dritter vom Objektpunkte ausgehender Strahl nach der Brechung gar nicht mehr durch den zugehörigen Bildpunkt gehen wird. Die Strahlenvereinigung ist also in diesem Falle viel geringer und naturgemäß optisch weniger wirksam als im paraxialen Gebiete. Läßt man von einem Punkte L aus

Fig. 40.

(Fig. 40) im Hauptschnitte die einander unendlich nahen Strahlen LA, LP, LC, LD unter endlicher Neigung zur Achse ausgehen, so werden sich nach der Brechung die Strahlen LA und LP in a, LP und LC in b, LC und LD in c schneiden. Die Punkte a, b, c bilden das Stück einer kaustischen Linie, das man mit dem Namen Koma bezeichnet.

§ 79. Der Helmholtz-Lagrangesche Satz für meridionale Bündel.

Für das paraxiale Gebiet lautete dieser Satz (vgl. S. 21):

$$n y u = n' y' u' .$$

Wir werden jetzt nachweisen, daß derselbe auch für endlich geneigte Bündel gültig bleibt. Sei wieder A ein leuchtender Punkt (Fig. 39) und

$$\sphericalangle PAQ = du ,$$

so ist nach Gleichung (209) S. 125

$$ds \cos i = du\, t .$$

Befinde sich nun (Fig. 41) im Punkte A ein kleines achsensenkrechtes Objekt y. Verbinden wir die Spitze B dieses Objektes mit dem Punkte P, so erhalten wir offenbar einen kleinen Winkel bei P, welcher gleich di zu setzen ist, da ja

$$\sphericalangle APM = i$$

ist. In dem so entstandenen unendlich kleinen Dreiecke ABP ist

Fig. 41.

$$di = \frac{y}{t} .$$

Durch Multiplikation der letzten beiden Gleichungen finden wir

$$ds \cos i\, di = du\, y .$$

Multiplizieren wir diese Gleichung noch mit dem Brechungsexponenten n, so haben wir

$$n\, du\, y = ds\, n \cos i\, di$$

oder

$$n\, du\, y = ds\, d(n \sin i) . \tag{219}$$

Für das gebrochene Bündel ist analog:

$$n'\, du'\, y' = ds\, d(n' \sin i')$$

oder mit Rücksicht auf das Brechungsgesetz

$$n'\, du'\, y' = ds\, d(n \sin i) . \tag{220}$$

Vergleichen wir die Gleichungen (219) und (220), so ergibt sich:

$$n\,du\,y = n'\,du'\,y' \,.$$

Der Helmholtz-Lagrangesche Satz gilt also auch für beliebig geneigte meridionale Bündel.

§ 80. Die fokalen Schnittweiten eines Meridionalbündels.

Irgend ein leuchtender Punkt werde mit Hilfe eines meridionalen Bündels abgebildet. Dann würden, abgesehen von dem geringeren Grade der Strahlenvereinigung analoge Beziehungen bestehen, wie für das paraxiale Gebiet. Lassen wir also den Objektpunkt in Richtung des einfallenden Bündels wandern, so wandert auch der Bildpunkt. Lassen wir den Objektpunkt schließlich ins Unendliche gehen, so würden die Strahlen parallel auf die Fläche auffallen und nach der Brechung sich in dem Brennpunkte F' des meridionalen Bündels schneiden. In diesem Falle setzen wir die Objektweite

$$t = \infty \,,$$

und Gleichung (218) liefert:

$$\frac{n' \cos^2 i'}{t'} = \frac{1}{r}\,(n' \cos i' - n \cos i) \,,$$

oder wenn wir noch t' mit dem Index 0 versehen zum Zeichen, daß wir es mit aus dem Unendlichen kommenden Strahlen zu tun haben,

$$t'_0 = \frac{r\,n' \cos^2 i'}{n' \cos i' - n \cos i} \,. \tag{221}$$

Dieser Ausdruck stellt die Entfernung des Brennpunktes F' von der brechenden Fläche dar. Hätten wir das Bündel von der anderen Seite einfallen lassen, so hätten wir ganz analog für die Entfernung des anderen Brennpunktes F erhalten:

$$t_0 = \frac{r\,n \cos^2 i}{n' \cos i' - n \cos i} \,. \tag{222}$$

Für das paraxiale Gebiet stellten die Größen t'_0 und t_0, wie sie durch die Gleichungen (221) und (222) bestimmt sind, die fokalen Schnittweiten und auch zugleich die Brennweiten der brechenden Fläche dar. Für die hier in Frage kommenden Tangentialstrahlen stellen diese Größen jedoch nur die Schnittweiten und nicht die Brennweiten dar, wie jetzt gezeigt werden soll.

§ 81. Die Brennweiten eines Meridionalbündels.

Nach den S. 29 gegebenen Definitionen sind für ein paraxiales Bündel die Brennweiten durch die Gleichungen bestimmt:

$$f' = \frac{h}{\operatorname{tang} u'} = \frac{h}{u'} \quad \text{und} \quad f = \frac{h'}{\operatorname{tang} u} = \frac{h'}{u}\,. \tag{223}$$

Überträgt man nun diese Definitionen auf ein meridionales Bündel, so kommt man zu dem wahren Ausdruck für die Brennweiten.

In der Figur 42 seien PN und QL zwei einander parallele Strahlen eines meridionalen Bündels, das auf eine Kugelfläche mit

Fig. 42.

dem Mittelpunkte M fällt. Von den Punkten L und N sind die Lote LL_1 und NS' auf die Richtung des einfallenden und gebrochenen Bündels gefällt. Es sei nun

$$LL_1 = h\,, \qquad NL = ds\,,$$

ferner sind die Winkel

$$\sphericalangle\, L_1LN = i \quad \text{und} \quad \sphericalangle\, S'NL = i'$$

bezw. dem Einfalls- und Brechungswinkel gleich. Dann ist, wenn noch

$$\sphericalangle\, S'F'N = u' \quad \text{und} \quad NF' = t_0'$$

gesetzt wird,

$$h = ds \cos i \tag{224}$$

und

$$NS' = ds \cos i'\,,$$

weiter ist aber auch

$$NS' = u' t_0'\,,$$

also

$$ds \cos i' = u' t_0'$$

oder

$$u' = \frac{ds \cos i'}{t_0'} \,. \tag{225}$$

Setzen wir jetzt die Werte von h und u' aus Gleichung (224) und (225) in Gleichung (223) ein, so findet man:

$$f' = \frac{t_0' \, ds \cos i}{ds \cos i'} = t_0' \frac{\cos i}{\cos i'} \,, \tag{226}$$

auf ganz analoge Weise findet man für die andere Brennweite

$$f = t_0 \frac{\cos i'}{\cos i} \,, \tag{227}$$

wo die Werte t_0 und t_0' durch die Gleichungen (221) und (222) gegeben sind. Ferner ergibt sich:

$$\frac{f}{f'} = \frac{n \cos i^2 \cos i'^2}{n' \cos i'^2 \cdot \cos i^2} \,,$$

$$\frac{f}{f'} = \frac{n}{n'} \,.$$

Also auch bei meridionalen Strahlen verhalten sich die Brennweiten wie die Brechungsexponenten des Objekt- und Bildraumes, genau wie bei Paraxialstrahlen.

§ 82. Rekursionsformeln für Meridionalstrahlen.

Hat man also ein System von brechenden Flächen, welche sich in gegebenem Abstande voneinander befinden, so erhält man auch für meridionale Strahlen ein dem für Paraxialstrahlen geltenden System (200) S. 120 entsprechendes Rekursionsformelsystem

$$\text{(A)} \quad \begin{cases} n_{\varkappa-1} \cos i_{\varkappa-1} \left(\dfrac{1}{r_{\varkappa-1}} - \dfrac{\cos i_{\varkappa-1}}{t_{\varkappa-1}} \right) = n'_{\varkappa-1} \cos i'_{\varkappa-1} \left(\dfrac{1}{r_{\varkappa-1}} - \dfrac{\cos i'_{\varkappa-1}}{t'_{\varkappa-1}} \right), \\ t_\varkappa = t'_{\varkappa-1} - d_{\varkappa-1} \,, \\ n_\varkappa \cos i_\varkappa \left(\dfrac{1}{r_\varkappa} - \dfrac{\cos i_\varkappa}{t_\varkappa} \right) = n'_\varkappa \cos i'_\varkappa \left(\dfrac{1}{r_\varkappa} - \dfrac{\cos i'_\varkappa}{t'_\varkappa} \right), \end{cases}$$

woraus man durch sukzessive Substitution den Schnittpunkt der beiden Strahlen nach beliebig vielen Brechungen finden kann. Hierbei bedeuten die Größen $d_{\varkappa-1}$ die zwischen zwei aufeinander folgenden Flächen befindlichen Teile der Strahlen.

§ 83. Formeln für den anderen astigmatischen Bildpunkt. (Sagittaler Bildpunkt.)

Die Formeln für den sagittalen Bildpunkt sind ganz ähnlich gebaut wie die für den meridionalen.

Wir nehmen wieder eine brechende Kugelfläche vom Radius $AM = r$ und dem Mittelpunkte M an (Fig. 43). Der größeren Deutlichkeit wegen wollen wir uns zunächst der anschaulichen Zählweise bedienen. Wir wollen jetzt die sagittalen Strahlen, d. h. die in einer zur Zeichnungsebene senkrechten Ebene verlaufenden Strahlen, eines unendlich

Fig. 43.

dünnen Strahlenbündels untersuchen. Diese Strahlen werden bei σ und σ_1 gebrochen und müssen, wie wir aus den obigen Betrachtungen wissen, nach der Brechung den Hauptstrahl, d. h. die Achse des Bündels, irgendwo schneiden. Dieser Schnittpunkt ist der sogenannte sagittale Bildpunkt, er liegt immer da, wo die Verbindungslinie PM des leuchtenden Punktes P mit dem Mittelpunkte M die Achse des gebrochenen Bündels schneidet. Man kann sich dies durch folgende Überlegung klar machen:

Wir fassen PMP' als feste Rotationsachse auf und bewirken eine unendlich kleine Drehung des Hauptschnittes PAP' (Zeichnungsebene) um den Winkel $d\psi$ sowohl nach vorne als auch nach hinten (von der Zeichnungsebene aus). Der Punkt A wird eine unendlich kleine Gerade $\sigma\sigma_1$ beschreiben, die senkrecht zu PA und $P'A$ und auch senkrecht zum Hauptschnitte steht. Der Hauptschnitt selbst wird in die Lage $P\sigma P'$ und $P\sigma_1 P'$ kommen. $P\sigma$ und $P\sigma_1$ sind die hier in Frage kommenden Sagittalstrahlen und müssen, da ja der Punkt P' festbleibt, nach der Brechung durch denselben Punkt P' gehen.

Es sei nun

$$PA = s, \qquad AP' = s'$$

die sagittale Objektweite und die sagittale Bildweite. Einfalls- und Brechungswinkel seien wieder i und i'.

Aus der Figur ergibt sich unmittelbar

$$\Delta PMA + \Delta MAP' = \Delta PAP'$$

oder

$$\tfrac{1}{2} s r \sin(180 - i) + \tfrac{1}{2} r s' \sin i' = \tfrac{1}{2} s s' \sin(180 - i + i'),$$

$$s r \sin i + r s' \sin i' = s s' \sin(180 - [i - i']),$$

$$s r \sin i + r s' \sin i' = s s' \sin(i - i'),$$

oder wenn wir $\sin(i - i')$ entwickeln und gleichzeitig die Gleichung durch $\sin i$ dividieren:

$$s r + r s' \frac{\sin i'}{\sin i} = s s' \frac{\sin i \cos i' - \cos i \sin i'}{\sin i}.$$

Berücksichtigen wir noch, daß nach dem Brechungsgesetze

$$\frac{\sin i'}{\sin i} = \frac{n}{n'}$$

ist, so ergibt sich

$$s r + r s' \frac{n}{n'} = s s' \left(\cos i' - \cos i \cdot \frac{n}{n'}\right)$$

oder

$$n' s r + r s' n = s s' (n' \cos i' - n \cos i).$$

Diese Gleichung dividieren wir durch $s s' r$:

$$\frac{n'}{s'} + \frac{n}{s} = \frac{n' \cos i' - n \cos i}{r}.$$

Gehen wir jetzt wieder zu einem rationellen Systeme über, so müssen wir s negativ in Anrechnung bringen, die letzte Gleichung wird demnach, wenn wir, um Irrtümer betreffs der Zählweise zu vermeiden, s durch $-\sigma$ und s' durch σ' ersetzen: *)

$$\frac{n'}{\sigma'} - \frac{n}{\sigma} = \frac{n' \cos i' - n \cos i}{r}$$

oder

$$n\left(\frac{\cos i}{r} - \frac{1}{\sigma}\right) = n'\left(\frac{\cos i'}{r} - \frac{1}{\sigma'}\right). \tag{228}$$

---

*) Natürlich haben die Schnittweiten σ und σ' nichts mit den Punkten σ und σ_1 in der Figur 43 zu tun.

Diese Formel hat wieder die charakteristische Form einer Invariante. Aus ihr ist die Bildweite σ' zu berechnen, wenn die Entfernung σ des leuchtenden Punktes von der Fläche gegeben ist.

Hat man jetzt wieder ein System von brechenden Flächen, die sich in gegebenem Abstande voneinander befinden, so hat man auch für die sagittalen Strahlen des Bündels ein Rekursionsformelsystem, nämlich

$$\text{(B)} \quad \begin{cases} n_{\varkappa-1}\left(\dfrac{\cos i_{\varkappa-1}}{r_{\varkappa-1}} - \dfrac{1}{\sigma_{\varkappa-1}}\right) = n'_{\varkappa-1}\left(\dfrac{\cos i'_{\varkappa-1}}{r_{\varkappa-1}} - \dfrac{1}{\sigma'_{\varkappa-1}}\right), \\ \sigma_\varkappa = \sigma'_{\varkappa-1} - d_{\varkappa-1}, \\ n_\varkappa\left(\dfrac{\cos i_\varkappa}{r_\varkappa} - \dfrac{1}{\sigma_\varkappa}\right) = n'_\varkappa\left(\dfrac{\cos i'_\varkappa}{r_\varkappa} - \dfrac{1}{\sigma'_\varkappa}\right), \end{cases}$$

woraus man durch sukzessive Substitution den sagittalen Bildpunkt nach beliebig vielen Brechungen finden kann.

Dieses Formelsystem in Verbindung mit dem Formelsysteme (A) (S. 130) dient zur Feststellung des in einem Bündel herrschenden Astigmatismus. Man berechnet nach den Formeln (A) die Lage des meridionalen Bildpunktes und nach den Formeln (B) die Lage des sagittalen Bildpunktes. Die Entfernung dieser Punkte voneinander ist die astigmatische Differenz. Ist dieser Weg auch etwas mühselig, so ist er doch der einzige, der im allgemeinen Falle einen Überblick über den astigmatischen Korrektionszustand eines Systemes liefert.

§ 84. Graphische Darstellung des Astigmatismus.

Von einem Objektpunkte aus geht durch ein photographisches Objektiv nun aber nicht nur ein unendlich dünnes Strahlenbündel, sondern es gehen unendlich viele Bündel hindurch. Unsere Darstellung leidet daran, daß man nicht weiß, welches Bündel man zweckmäßig zur Durchrechnung benutzen soll. In den optischen Werkstätten hat man sich bisher über diese Schwierigkeit meist auf folgendem Wege hinweggeholfen.

Man denkt sich, wie S. 44 u. f. erläutert wurde, die Aperturblende so weit verkleinert, daß durch sie und demnach auch durch die (EP) und (AP) nur noch die Hauptstrahlen hindurchgehen. Für das hierdurch bestimmte unendlich dünne Bündel und zwar für mehrere zweckentsprechend angenommene Neigungen werden dann die meridionalen und sagittalen Bildpunkte gemäß den Formeln (A) und (B) S. 130 und 133 bestimmt.

Ausführungsbeispiele für diese Methode werden wir weiter unten noch erbringen.

In der Figur 44 sind außer dem Achsenstrahle drei den Mittelpunkt L der Aperturblende durchdringende Hauptstrahlen gezeichnet und durch s', s'', s''' die sagittalen, durch m', m'', m''' die meridionalen Bildpunkte bezeichnet. Man sieht, daß auf diese Weise im Hauptschnitte eine Kurve der meridionalen Bildpunkte (μ-Kurve) und eine der sagittalen Bildpunkte (σ-Kurve) entsteht. Fallen diese

Fig. 44.

beiden Kurven zusammen, so ist der Astigmatismus gehoben. Degenerieren diese zusammenfallenden Kurven zu einer in F' achsensenkrechten Geraden, so ist außerdem Bildfeldebenung vorhanden. Für die Bedürfnisse der Praxis genügt es jedoch, daß die beiden Kurven sich von jener Geraden nicht zu weit entfernen.

Man hat nun bisher diese für eine Blende mit unendlich kleiner Öffnung geltenden Betrachtungen auch auf Blenden mit endlicher Öffnung übertragen. Unsere modernen Objektive haben jedoch zum Teil Blenden mit verhältnismäßig sehr großen Öffnungen. Es werden also in Wirklichkeit schon von einem einzigen Punkte aus nicht nur ein einziges, sondern unendlich viele Strahlenbündel durch ein Objektiv geschickt werden, und es liegt eine gewisse Willkür darin, von diesen vielen Strahlenbündeln immer gerade das herauszugreifen, welches durch die Mitte der Aperturblende geht, und zu behaupten, daß dieses Bündel gerade die Stelle größter Strahlendichte enthält. Ebensowenig erscheint die zuweilen geübte Praxis gerechtfertigt, für die Bestimmung des Astigmatismus ohne weiteres die durch die Hauptpunkte gehenden Strahlen zu verwenden.

§ 85. Die kaustische Spitze.

Verfolgen wir nämlich sämtliche von einem leuchtenden Punkte ausgehenden und im Hauptschnitte verlaufenden Strahlen in den Bildraum hinein, so werden diese Strahlen nach der Brechung an irgend einer Stelle eine Vereinigung höherer Ordnung eingehen als an allen anderen Stellen des Raumes. Die Strahlen werden an dieser Stelle eine sogenannte kaustische Spitze bilden, d. h. es werden sich an dieser Stelle nicht nur zwei Strahlen — wie an allen anderen Stellen des Hauptschnittes, — sondern drei Strahlen streng in einem Punkte schneiden. Schneiden sich aber drei Strahlen streng in einem Punkte, so ist an dieser Stelle keine „Koma" vorhanden. Eins von den unendlich vielen Strahlenbündeln, welche von einem leuchtenden Punkte ausgehen, hat nun die ausgezeichnete Eigenschaft, durch diese komafreie Stelle hindurchzugehen. Dieses Bündel — das jedoch nicht notwendig durch die Mitte der Blende gehen muß — ist vor allen anderen dadurch ausgezeichnet, daß es durch eine Stelle mit besonders intensiver Strahlenvereinigung geht, und wird deshalb mit größtem Recht als der Träger des Bildpunktes angesehen werden.

Kapitel 9.

Die natürliche Blende und die Abbildung durch Fundamentalstrahlen.

§ 86. Die Koma.

Es war

$$Q = n \sin i = n' \sin i' \tag{229}$$

eine optische Invariante (vgl. S. 122). Diese Gleichung differenzieren wir nach φ und erhalten

$$\frac{dQ}{d\varphi} = n \cos i \frac{di}{d\varphi}, \tag{230}$$

mit Rücksicht auf Gleichung (213) S. 125 ergibt sich hieraus

$$\frac{1}{r}\frac{dQ}{d\varphi} = n \cos i \left(\frac{1}{r} - \frac{\cos i}{t}\right). \tag{231}$$

Diese Größe ist wieder eine optische Invariante und wir setzen:

$$Q^I = n \cos i \left(\frac{1}{r} - \frac{\cos i}{t}\right). \tag{232}$$

Durch Differentiation entsteht hieraus

$$\frac{dQ^I}{d\varphi} = -\left(\frac{1}{r} - \frac{\cos i}{t}\right) n \sin i \frac{di}{d\varphi} - n \cos i \frac{\partial \frac{\cos i}{t}}{\partial i} \frac{di}{d\varphi}$$
$$- n \cos i \frac{\partial \frac{\cos i}{t}}{\partial t} \frac{dt}{d\varphi},$$

und zufolge Gleichung (213) S. 125 ergibt sich hieraus

$$\frac{dQ^I}{d\varphi} = -r\left(\frac{1}{r} - \frac{\cos i}{t}\right)^2 n \sin i + n \cos i \frac{\sin i}{t} \frac{di}{d\varphi}$$
$$+ \frac{n \cos i^2}{t^2} \frac{dt}{d\varphi}$$

und weiter:

$$\frac{dQ^I}{d\varphi} = -r\left(\frac{1}{r} - \frac{\cos i}{t}\right)^2 n \sin i + n \cos i\, r \left(\frac{1}{r} - \frac{\cos i}{t}\right)\frac{\sin i}{t}$$
$$+ \frac{n \cos i^2}{t^2}\,\frac{dt}{d\varphi}\,.$$

Führt man jetzt die Größen Q und Q^I ein und berücksichtigt Gleichung (210) S. 125, so wird:

$$(233)\qquad \frac{dQ^I}{d\varphi} = -r\,Q\left(\frac{1}{r} - \frac{\cos i}{t}\right)^2 + r\,Q\,Q^I\,\frac{1}{n\,t} + r\,\frac{n \cos i^3}{t^3}\,\frac{dt}{du}\,.$$

Wir wollen jetzt die Größe dt, die Zunahme von t darstellen, wenn ein Meridionalbündel von der Schnittweite t in ein anderes benachbartes von der Schnittweite $t + dt$ übergeht. In der Figur 45 sei PAQ ein unendlich dünnes einfallendes Meridionalbündel, dessen

Fig. 45.

Objektpunkt A wir entsprechend der rationellen Zählweise rechts von der brechenden Fläche annehmen, damit wir die Schnittweite $PA = t$ in der Figur als positiv annehmen können. Außer diesem Bündel sei noch das ihm benachbarte Bündel QBR dargestellt, dessen Randstrahl RB verlängert PA in C schneidet. Von B und Q sind noch die Lote BD und QE auf AP gefällt und in C ist auf RB ein Lot CN errichtet.

Bei dem Grade der hier vorausgesetzten Genauigkeit ist es nun gestattet, anzunehmen, daß das Dreieck BCA gleichschenklig sei, daß also

$$BC = CA$$

ist. Weiter kann man auch das Dreieck BCD als gleichschenklig betrachten, so daß

$$BC = CD$$

ist. Wir wollen setzen

$$AC = BC = CD = d\tau .$$

Weiter sei:

$$CN = dl$$

und

$$PQ = RQ = ds ,$$

ferner ist wieder (Fig. 45)

$$\sphericalangle PAQ = du ,$$
$$\sphericalangle PMQ = d\varphi ,$$
$$\sphericalangle EQP = i .$$

Die drei benachbarten Strahlen schneiden sich nicht in einem Punkte, sondern bilden das unendlich kleine Dreieck ABC, welches, wie schon oben erwähnt, die Veranlassung zur Komabildung ist.

Beim Übergange von einem Bündel zum benachbarten ist $PA = t$ in QB übergeführt worden, welche letztere Größe wir konsequenterweise mit $t + dt$ bezeichnen müssen. Projizieren wir QB auf PA, so ist

$$t + dt = QB = ED : \cos du ,$$

und da der Winkel du unendlich klein ist, so wird sein Kosinus gleich Eins, also können wir statt QB auch ED setzen. Nun ist, wie sich aus der Figur 45 unmittelbar ergibt:

$$PA = PE + ED + DC + CA ,$$

oder, was dasselbe ist

$$t = PE + (t + dt) + d\tau + d\tau .$$

Im Dreiecke PQE ist

$$PE = ds \sin i$$

und im Dreiecke QPM ist

$$ds = r\, d\varphi ,$$

also wird

$$PE = r\, d\varphi \sin i ,$$

und unsere Gleichung wird

$$t = r\, d\varphi \sin i + t + dt + 2\, d\tau ,$$

woraus sich ergibt, wenn wir gleichzeitig durch du dividieren,

$$\frac{dt}{du} = -2\frac{d\tau}{du} - r \sin i \frac{d\varphi}{du} ,$$

und mit Rücksicht auf Gleichung (210) S. 125 finden wir

$$\frac{dt}{du} = -2\frac{d\tau}{du} - \frac{t\sin i}{\cos i}. \tag{234}$$

Diesen Wert von $\frac{dt}{du}$ setzen wir in Gleichung (233) ein. Es wird somit, wenn wir noch durch r dividieren:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{1}{r}\frac{dQ^I}{d\varphi} &= -Q\left(\frac{1}{r}-\frac{\cos i}{t}\right)^2 + QQ^I\frac{1}{nt} + \frac{n\cos i^3}{t^3}\left(-2\frac{d\tau}{du}-\frac{t\sin i}{\cos i}\right)\\ &= -\frac{Q}{r^2} + \frac{2Q\cos i}{rt} - \frac{Q\cos i^2}{t^2} + \frac{QQ^I}{nt} - \frac{2n\cos i^3}{t^3}\frac{d\tau}{du}\\ &\qquad - \frac{n\sin i\cos i^2}{t^2}\\ &= -\frac{Q}{r^2} + \frac{2Qn\cos i}{nt}\left(\frac{1}{r}-\frac{\cos i}{t}\right) + \frac{QQ^I}{nt} - \frac{2n\cos i^3}{t^3}\frac{d\tau}{du} \end{aligned}\right. \tag{235}$$

oder mit Rücksicht auf Gleichung (232)

$$\frac{1}{r}\frac{dQ^I}{d\varphi} = -\frac{Q}{r^2} + \frac{3QQ^I}{nt} - \frac{2n\cos i^3}{t^3}\cdot\frac{d\tau}{du}. \tag{236}$$

Wären wir von der Gleichung

$$Q = n'\sin i'$$

ausgegangen, so wären wir zu einer ganz analogen Gleichung wie (236) gelangt, in der die Größen n, t, $d\tau$, du, i durch die entsprechenden gestrichenen Buchstaben ersetzt wären. r und $d\varphi$ bleiben jedoch unverändert. Diese neue Gleichung würde sich dann auf das gebrochene Bündel beziehen. Der Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung (236) ist also wieder eine optische Invariante. Man hat also auch

$$\frac{1}{r}\frac{dQ^I}{d\varphi} = -\frac{Q}{r^2} + \frac{3QQ^I}{n't'} - \frac{2n'\cos i'^3}{t'^3}\frac{d\tau'}{du'}. \tag{237}$$

Wenden wir jetzt auf unsere Gleichungen (236) und (237) die Abbesche Schreibweise (§ 66 S. 105) an, so ergibt sich, nachdem wir die rechten Seiten gleichgesetzt haben,

$$\Delta\left(\frac{n\cos i^3}{t^3}\cdot\frac{d\tau}{du}\right) = \tfrac{3}{2}\,QQ^I\Delta\left(\frac{1}{nt}\right). \tag{238}$$

Nun ist weiter nach der Figur 45:

$$dl = d\tau\,du \quad \text{also} \quad \frac{d\tau}{du} = \frac{dl}{du^2}. \tag{239}$$

Aus dieser Gleichung sehen wir, daß dl unendlich klein vom zweiten Grade ist, da $d\tau$ und du unendlich klein vom ersten Grade sind.

Nach Gleichung (210) und (207) wird:

$$\frac{\cos i}{t} = \frac{du}{r\,d\varphi} = \frac{du}{ds} \tag{240}$$

und aus den beiden letzten Gleichungen ergibt sich

$$\frac{n \cos i^3}{t^3} \frac{d\tau}{du} = n \left(\frac{du}{ds}\right)^3 \frac{dl}{du^2} = \frac{1}{ds^3} n\,du\,dl\,. \tag{241}$$

Demnach wird Gleichung (239)

$$\Delta\left(\frac{n\,du\,dl}{ds^3}\right) = \tfrac{3}{2}\, Q\, Q^I \Delta\left(\frac{1}{n\,t}\right) \tag{242}$$

oder, da ja ds vor und nach der Brechung dasselbe ist,

$$\frac{1}{ds^3} \Delta(n\,du\,dl) = \tfrac{3}{2}\, Q\, Q^I \Delta\left(\frac{1}{n\,t}\right). \tag{243}$$

Diese Gleichung gilt für eine einzige brechende Fläche.

Wir haben gesehen, daß sich hier (Fig. 45) drei unendlich nahe Strahlen nicht in einem Punkte schneiden, sondern ein unendlich kleines Dreieck bilden, dessen Größe ein Maß für die Koma ist. Die Koma würde gleich Null sein, wenn dieses unendlich kleine Dreieck verschwinden würde; dieses ist aber der Fall, wenn dl, die Höhe in dem unendlich kleinen Dreieck, verschwindet. Für eine einzige brechende Fläche würde also

$$dl = 0$$

die Bedingung der Komafreiheit sein.

Um die Bedingung der Komafreiheit für ein System von beliebig vielen brechenden Flächen darzustellen, verfährt man folgendermaßen:

Wir nehmen an, die Gleichung (243) gelte für die Brechung an irgend einer, z. B. an der $\varkappa^{\text{ten}}$ Fläche des Systemes, zu welchem Zwecke wir uns an alle Größen den Index $\varkappa$ angefügt denken.

Wir erhalten:

$$\frac{1}{ds_\varkappa^3} \Delta(n\,du\,dl)_\varkappa = \tfrac{3}{2}\, Q_\varkappa Q_\varkappa^I \Delta\left(\frac{1}{n\,t}\right)_\varkappa. \tag{244}$$

Nach unseren Definitionen ist

$$\Delta(n\,du\,dl)_\varkappa = n'_\varkappa\, du'_\varkappa\, dl'_\varkappa - n_\varkappa\, du_\varkappa\, dl_\varkappa$$

oder, da ja für jeden Wert von $\varkappa$

$$n'_\varkappa = n_{\varkappa+1}$$

ist, so wird:

(245) $$\Delta (n\,du\,dl)_\varkappa = n_{\varkappa+1}\,du'_\varkappa\,dl'_\varkappa - n_\varkappa\,du_\varkappa\,dl_\varkappa\,.$$

Wir fassen nun $dl'_\varkappa$ für einen Augenblick als unendlich kleines Objekt auf. Es liegt allerdings nicht streng im Bildpunkte des in Frage kommenden unendlich dünnen Meridionalbündels, aber es liegt ihm doch unendlich nahe. Wir haben S. 127 gesehen, daß der Helmholtz-Lagrangesche Satz auch für beliebig geneigte meridionale Bündel gilt. Man kann also dieses unendlich kleine Objekt in den Objektraum hinein abbilden. Es ist demnach:

(246) $$n_{\varkappa+1}\,du'_\varkappa\,dl'_\varkappa = n_1\,du_1\,dl_1\,,$$

wo n_1 und du_1 Brechungsexponent und halbe Öffnung des Bündels im ersten Medium sind. Dabei ist dl_1 diejenige Objektgröße, welcher nach der $\varkappa^{\text{ten}}$ Brechung gerade die Bildgröße $dl'_\varkappa$ entspricht.

Genau dieselben Betrachtungen wenden wir jetzt auf die Größe $dl_\varkappa$ an. Wir nehmen an, sie sei ein unendlich kleines Objekt, und bilden dieses nach dem Helmholtz-Lagrangeschen Satze in den Objektraum hinein ab, dann wird:

(247) $$n_\varkappa\,du_\varkappa\,dl_\varkappa = n_1\,du_1\,d\lambda_1\,,$$

wo n_1 und du_1 dieselbe Bedeutung haben wie oben; $d\lambda_1$ ist diejenige Objektgröße, welcher vor der $\varkappa^{\text{ten}}$ Brechung gerade die Bildgröße $dl_\varkappa$ entspricht.

Setzt man die Größen aus (246) und (247) in (245) ein, so erhält man

$$\Delta (n\,du\,dl)_\varkappa = n_1\,du_1\,dl_1 - n_1\,du_1\,d\lambda_1$$

oder, wenn man noch

$$dl_1 - d\lambda_1 = \delta(l)$$

setzt:

(248) $$\Delta (n\,du\,dl)_\varkappa = n_1\,du_1\,\delta(l)\,,$$

und die Gleichung (244) geht somit über in

(249) $$\frac{1}{ds_\varkappa^3}\,n_1\,du_1\,\delta(l) = \tfrac{3}{2}\,Q_\varkappa Q_\varkappa^I\,\Delta\left(\frac{1}{n\,t}\right)_\varkappa\,,$$

daraus ergibt sich

$$\delta(l) = \tfrac{3}{2}\,\frac{ds_\varkappa^3}{n_1\,du_1}\,Q_\varkappa Q_\varkappa^I\,\Delta\left(\frac{1}{n\,t}\right)_\varkappa\,,$$

oder wenn wir die rechte Seite dieser Gleichung mit $(n_1\, du_1)^2$ erweitern:

$$\delta(l) = \tfrac{3}{2}\,(n_1\, du_1)^2 \left(\frac{ds_\varkappa}{n_1\, du_1}\right)^3 Q_\varkappa Q'_\varkappa\, \Delta\left(\frac{1}{n\,t}\right)_\varkappa . \tag{250}$$

Nach Gleichung (209) S. 125 ist nun

$$du_1 = \frac{ds_1 \cos i_1}{t_1} ,$$

und demzufolge wird Gleichung (250)

$$\delta(l) = \tfrac{3}{2}\,(n_1\, du_1)^2 \left(\frac{t_1}{n_1 \cos i_1}\right)^3 \left(\frac{ds_\varkappa}{ds_1}\right)^3 Q_\varkappa Q'_\varkappa\, \Delta\left(\frac{1}{n\,t}\right)_\varkappa . \tag{251}$$

In der Figur 46 seien zwei beliebige brechende Flächen, z. B. die $(\varkappa - 1)^{\text{te}}$ und die $\varkappa^{\text{te}}$, dargestellt. Das an der $\varkappa - 1^{\text{ten}}$ Fläche gebrochene Bündel sei PQA' mit dem Bildpunkte A', während dieses Bündel die $\varkappa^{\text{te}}$ Fläche in $P'Q'$ treffe. Die von Q und Q' auf den Strahl PA' gefällten Lote seien QE und $Q'E'$. Unter Beibehaltung der bisher gebrauchten Bezeichnungen hat man dann:

Fig. 46.

$$\sphericalangle\, PQE = i'_{\varkappa-1} ,$$
$$\sphericalangle\, P'Q'E' = i_\varkappa ,$$

da die Schenkel des Winkels PQE normal auf den Schenkeln des Winkels $i'_{\varkappa-1}$ und die Schenkel des Winkels $P'Q'E'$ normal stehen auf den Schenkeln des Winkels $i_\varkappa$.

Weiter ergibt sich aus der Figur 46

$$QE = ds_{\varkappa-1} \cos i'_{\varkappa-1} ,$$
$$Q'E' = ds_\varkappa \cos i_\varkappa .$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $A'EQ$ und $A'E'Q'$ ergibt sich dann weiter

$$\frac{Q'E'}{QE} = \frac{t_\varkappa}{t'_{\varkappa-1}} = \frac{ds_\varkappa \cos i_\varkappa}{ds_{\varkappa-1} \cos i'_{\varkappa-1}}$$

oder

$$\frac{ds_\varkappa}{ds_{\varkappa-1}} = \frac{t_\varkappa}{t'_{\varkappa-1}}\, \frac{\cos i'_{\varkappa-1}}{\cos i_\varkappa} , \tag{252}$$

da $QA' = PA'$ ja unendlich nahe Strahlen sind, also

$$PA' = QA' = t'_{\varkappa-1}$$

und

$$P'A' = Q'A' = t_\varkappa$$

gesetzt werden kann.

Die Beziehung (252) gilt stets für zwei aufeinander folgende Brechungen. Durch sukzessive Anwendung dieser Formel findet man

$$\text{(253)} \qquad \frac{ds_\varkappa}{ds_1} = \frac{t_\varkappa}{t'_{\varkappa-1}} \cdot \frac{t_{\varkappa-1}}{t'_{\varkappa-2}} \cdots \frac{t_2}{t'_1} \times \frac{\cos i'_{\varkappa-1}}{\cos i_\varkappa} \cdot \frac{\cos i'_{\varkappa-2}}{\cos i_{\varkappa-1}} \cdots \frac{\cos i'_1}{\cos i_2} \,.$$

Sind also in dem Bündel die Schnittweiten t und die Winkel i und i' etwa durch trigonometrische Rechnung bestimmt, so dient die Formel (253) zur Bestimmung von $\frac{ds_\varkappa}{ds_1}$, wodurch dann der Ausdruck unter (251) berechenbar wird.

Die Größe $\delta(l)$ in Formel (251) stellt uns die Verschlechterung dar, welche an dem Bilde unter dem Einflusse der Komawirkung durch die $\varkappa^{\text{te}}$ Fläche bewirkt wird. Man kann nach dieser Formel die Verschlechterung für jede einzelne brechende Fläche sofort hinschreiben, indem man in (251) für $\varkappa$ alle ganzen Zahlen von 1 bis λ setzt.

Summiert man die so erhaltenen Ausdrücke, so erhält man die Gesamtverschlechterung, die durch alle λ Flächen bewirkt wird.

§ 87. Bedingung der Komafreiheit.

Damit die Summe dieser Verschlechterungen verschwindet, in dem betrachteten Bündel also die „Koma“ aufgehoben ist, hat man sowohl für Objekte in endlicher wie auch in unendlicher Entfernung nach Unterdrückung konstanter Faktoren die Bedingung:

$$\text{(254)} \qquad \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=\lambda} \left(\frac{ds_\varkappa}{ds_1}\right)^3 Q_\varkappa Q_\varkappa^l \,\Delta\left(\frac{1}{n\,t}\right)_\varkappa = 0 \,.$$

Hat man also im Objektraume einen beliebigen leuchtenden Punkt, von dem aus im Hauptschnitt unendlich viele meridionale Strahlenbündel ausgehen, die einen endlichen Winkel füllen und ein beliebiges zentriertes System von λ brechenden Flächen durchdringen, so gilt Gleichung (254) für dasjenige Bündel, das nach der Brechung durch einen komafreien Punkt geht, d. h. durch einen Punkt, in welchem sich drei unendlich nahe Strahlen schneiden. Die sämtlichen hier in

Frage kommenden gebrochenen Strahlen bilden bekanntlich eine kaustische Linie, welche eine Spitze, d. h. einen Punkt größter Strahlendichte besitzt. Diese Spitze ist identisch mit dem Bildpunkte des durch Gleichung (254) definierten Bündels.

Bemerkt sei hier, daß man Gleichung (254) gewöhnlich so weiter transformiert hat, daß man die darin auftretenden Sinusse und Kosinusse der Strahlenneigungen in Reihen entwickelte und schließlich alle höheren Potenzen als die zweiten vernachlässigte. Indem man dann ferner fordert, daß Gleichung (254) für alle Strahlenbündel von der angenommenen geringen Neigung gilt, gelangt man zu einer Beziehung zwischen den Konstanten (Radien, Brechungsexponenten usw.) des Systemes, welche als „Fraunhofersche Bedingung" in der Literatur bekannt ist. So grundlegend diese Beziehung für die Konstruktion von Fernrohrobjektiven ist, so hat sie doch für photographische Objektive keine Bedeutung wegen der relativ großen Öffnung und des großen Gesichtsfeldes der letzteren. Aus diesem Grunde sehen wir auch von einer näheren Darstellung dieser Bedingung hier ab.

§ 88. Ein einfaches Beispiel.

Wir wollen die Gleichung (254) zu dem Zwecke benützen, um bei weit geöffneten Systemen, wie es die meisten photographischen Objektive sind, die Spitze der im Bildraume sich entwickelnden kaustischen Fläche und damit das wirkliche Äquivalent für einen Bildpunkt aufzusuchen.

Um jedoch die allgemeinen Betrachtungen zu erleichtern, wollen wir die betreffenden Verhältnisse zunächst an einem einfachen Beispiele erläutern.

Vorher wollen wir jedoch noch darauf hinweisen, daß ein System unter sich paralleler Strahlen, die auf eine brechende Kugelfläche fallen, nach der Brechung eine kaustische Fläche bildet, deren Spitze auf demjenigen Strahle liegt, der ungebrochen hindurchgeht, der also vor der Brechung durch den Mittelpunkt M der Kugel geht. Bei einer solchen Brechung entsteht also stets ein von Astigmatismus freies Bild, dessen Wölbung allerdings im allgemeinen sehr ausgeprägt ist, da es auf einer Kugelfläche liegt, die um M als Mittelpunkt beschrieben ist.

Wir wollen uns eine plankonvexe Linse vorstellen, die dem Lichte ihre plane Seite zuwendet. Es fallen von einem sehr entfernten Punkte unter endlicher Neigung Strahlen auf die Linse, die natürlich alle als unter sich parallel laufend angesehen werden können. Diese werden

an der Planfläche gebrochen, behalten jedoch nach der Brechung die Eigenschaft, unter sich parallel zu sein, da ja die erste Brechung an einer Planfläche erfolgte. Die so gebrochenen Strahlen durchdringen nun die Linsensubstanz und erleiden beim Austritt aus der Linse eine zweite Brechung. Es ist in diesem einfachen Falle nun klar, daß, wenn wir zunächst uns auf den Hauptschnitt beschränken, derjenige Strahl des austretenden Bündels die Spitze der Kaustik trägt, der die Kugelfläche ungebrochen durchdringt, d. h. durch ihren Mittelpunkt M geht. Um diesen Strahl zu finden, brauchen wir also von den sämtlichen einfallenden Strahlen nur denjenigen auszusuchen, der nach der Brechung an der Planfläche durch den Mittelpunkt M der zweiten brechenden Fläche geht.

In Figur 47 sei unsere Plankonvexlinse dargestellt. Es sei PC der einfallende Strahl, der nach der ersten Brechung durch M gehen

Fig. 47.

muß und also in Richtung von MD verläuft, wo $MD = r$ der Radius der durch S gehenden zweiten Linsenfläche ist. Dieser letztere Strahl ist, wie schon ausgeführt, der Träger der kaustischen Spitze und erleidet an der zweiten Fläche keine Brechung.

Wir setzen

$$MS = MD = r\,, \quad AS = d\,, \quad AB = x_1\,, \quad AC = h\,,$$
$$\sphericalangle ABC = u\,, \quad \sphericalangle AMC = u'\,.$$

Dann folgt aus Figur 47

$$\operatorname{tg} u = \frac{h}{x_1}\,, \quad \operatorname{tg} u' = \frac{h}{r-d}\,,$$

also:

$$\frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u} = \frac{x_1}{r-d}$$

oder:

$$x_1 = (r - d)\frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u}. \tag{255}$$

Zwischen u und u' besteht noch die Beziehung

$$\sin u = n \sin u', \tag{256}$$

wenn n der Brechungsexponent der Linsensubstanz ist.

Gleichung (256) kann man auch schreiben

$$\operatorname{tg} u' = \frac{\sin u}{\sqrt{n^2 - \sin u^2}},$$

und Gleichung (255) wird

$$x_1 = \frac{(r - d)\cos u}{\sqrt{n^2 - \sin u^2}}. \tag{257}$$

Wenn also die Neigung u der einfallenden Strahlen gegeben ist, so liefert uns Gleichung (257) den Abstand x_1 des Punktes B von der Planfläche, durch den derjenige Strahl geht, welcher nach der Brechung die Spitze der Kaustik in sich trägt. Dieser Strahl — in Figur 47 PC — ist also der wahre Hauptstrahl. Um ihn jedoch nicht mit den früher definierten Hauptstrahlen zu verwechseln, wollen wir ihn den zu der Neigung u gehörigen Fundamentalstrahl nennen.

Wenn wir nun B zum Mittelpunkte der Aperturblende wählen würden, so fiele allerdings Hauptstrahl und Fundamentalstrahl zusammen, jedoch nur für die Neigung u. Wir erkennen also, daß die Theorie der Eintritts- und Austrittspupille für Systeme endlicher Öffnung allgemein nicht mehr gültig ist. Wir nennen den Punkt B den Mittelpunkt der natürlichen Blende und können den Satz aussprechen:

Der Mittelpunkt der natürlichen Blende wandert auf der optischen Achse, wenn man zu Bündeln verschiedener Strahlenneigungen übergeht.

Unter Voraussetzung von Paraxialstrahlen gibt Gleichung (257)

$$x_1 = \frac{r - d}{n}. \tag{258}$$

Um ein Beispiel zu geben, setzen wir $n = 1{,}5$, dann liefert Gleichung (258)

$$x_1 = (r - d)\,0{,}66.$$

Hätten wir dagegen in Gleichung (257) $u = 30^0$ gesetzt, so hätten wir erhalten:

$$x_1 = (r - d)\,0{,}61\,.$$

Bei einer Neigungsänderung der Winkel von 30^0 nach oben und unten, d. h. bei einem objektseitigen Gesichtsfeldwinkel von 60^0, wandert also die natürliche Blende nur um $(r-d)\,0{,}05$. Ist z. B. $r = 10$ cm und $d = 1$ cm, so beträgt diese Differenz 0,45 cm, bleibt also innerhalb geringer Grenzen.

Die Tatsache, daß der Ort der natürlichen Blende sich für relativ starke Strahlenneigungen nur wenig verschiebt, ist von großer Wichtigkeit für die photographische Optik. Denn infolgedessen können wir mit großer Annäherung an Stelle des wandernden Ortes einen festen setzen.

Entwickelt man nämlich den $\cos u$ und $\sin u$ in Gleichung (257) in eine unendliche Reihe, so erhält man unter Vernachlässigung höherer Potenzen von u als der vierten:

$$x_1 = \frac{r-d}{n}\left(1 - \frac{u^4}{4}\right).$$

Vernachlässigt man nun auch noch u^4, so geht die letzte Gleichung in die Gleichung (258) über, welche also den Mittelpunkt der natürlichen Blende festlegt und zwar gültig unter Vernachlässigung erst vierter Potenzen der Strahlenneigungen.

Während also die Theorie der Strahlenbegrenzung, wie sie durch die Definitionen der Aperturblende, Eintritts- und Austrittspupille gegegeben ist, keinen Hinweis liefert, welcher Punkt der Achse als Mittelpunkt der Aperturblende zu wählen ist (weil im paraxialen Gebiete tatsächlich alle Punkte in bezug auf die daraus resultierende Strahlenvereinigung gleichberechtigt sind), lehrt die Theorie der natürlichen Blende und der Fundamentalstrahlen diesen für die Blendenstellung und für die trigonometrische Durchrechnung wichtigen Punkt kennen.

Wie schon oben ausgeführt, berechnete man bisher, um sich über den astigmatischen Zustand eines Objektives zu unterrichten, den Verlauf einer Anzahl Hauptstrahlen unter mehr oder minder willkürlicher Annahme des Ortes der Aperturblende und stellte auf diesen Hauptstrahlen im Bildraume die Lage der meridionalen und sagittalen Bildpunkte fest, in dem Glauben, daß diese Punkte nun wirklich die Stelle größter Strahlendichte wären. Welchen Irrtümern man jedoch ausgesetzt ist, wenn man die Lehre von den Fundamentalstrahlen nicht berücksichtigt, zeigen die folgenden Betrachtungen.

In dem von uns gewählten Beispiel einer plankonvexen Linse fällt das Bündel der unter sich parallelen Strahlen auf die hintere Linsenfläche. Wir haben bereits bemerkt, daß in diesem Falle für jede Neigung der einfallenden Strahlen im Bildraume eine einfache kaustische Fläche mit einer Spitze existiert. Diese Spitzen liegen auf einer Kugelfläche mit dem Mittelpunkte M (Fig. 47). In der jetzt üblichen Terminologie würde man also sagen müssen: Die plankonvexe Linse liefert unter der Voraussetzung großer Blenden ein gewölbtes, aber von Astigmatismus freies Bild.

In den Figuren 48, 49, 50 ist der astigmatische Korrektionszustand für ein und dieselbe plankonvexe Linse graphisch dargestellt, wie er sich ergibt, wenn man verschiedene Achsenpunkte als Kreuzungspunkte für die Hauptstrahlen wählt.

Zugrunde gelegt sind die Daten

$$d = 8{,}6\,, \qquad r = -51{,}79\,, \qquad n = 1{,}5179\,,$$

die Brennweite der Linse ist gleich 100. (Vgl. auch § 115—117.)

Zunächst ergibt sich aus Gleichung (258) der Ort des Mittelpunktes der natürlichen Blende

$$x_1 = 28{,}454\,.$$

Figur 48 zeigt den Fall, daß die Hauptstrahlen durch den Mittelpunkt der natürlichen Blende gehen, zur Durchrechnung also Fundamentalstrahlen verwandt sind. In der Tat ergibt sich, wie es sein muß, ein von Astigmatismus freies, entsprechend gekrümmtes Bild.

Fig. 48.

Fig. 49.

Figur 49 zeigt den Fall, daß die Hauptstrahlen durch den Punkt gehend angenommen werden, in dem die optische Achse die plankonvexe Linse durchstößt. Es ergeben sich zwei astigmatische Flächen,

von denen die meridionale gestrichelt, die sagittale ausgezogen ist. Diese Flächen würden in der Tat sich zeigen, wenn im Kreuzungspunkte der Strahlen eine unendlich enge Blende stände. Aber jene Flächen repräsentieren nur eine Menge von Bildpunkten von ganz untergeordneter Strahlenvereinigung, wie sie sich abseits von den Spitzen in der weiteren Ausdehnung der kaustischen Flächen zeigen. Bei einigermaßen weiter geöffneten Blenden, wie sie in der Praxis fast immer vorhanden sind, wird von diesen astigmatischen Flächen keine Spur sich bemerkbar machen. Es werden dann vielmehr die Spitzen der kaustischen Flächen mit ihrem höheren Grade der Strahlenvereinigung als Bildpunkte sich geltend machen (gemäß Fig. 48). Ein noch mehr von der Wahrheit abweichender Korrektionszustand ergibt sich, wenn man, wie dies Figur 50 erläutert, den Kreuzungspunkt

Fig. 50

der Hauptstrahlen nach rechts von der Linse verlegt, d. h. eine Hinterblende verwendet. Hier sieht man eine starke Trennung der beiden astigmatischen Bildflächen, die den wahren Sachverhalt bei weitgeöffnetem Systeme gar nicht darstellen. Die Ausführung der Figuren 48 bis 50 verdanke ich der Liebenswürdigkeit des Herrn Dr. H. Harting in Braunschweig (Voigtländer & Sohn).

Diese Beispiele werden genügen, um die Bedeutung der Fundamentalstrahlen kenntlich zu machen, und lassen es gerechtfertigt erscheinen, daß man einer graphischen Darstellung mit beliebig angenommenem Kreuzungspunkte der Hauptstrahlen mißtrauisch gegenübersteht.

Insbesondere ist dies Mißtrauen bei sehr unsymmetrischen Systemen gerechtfertigt, während man bei symmetrischen Systemen den Symmetriepunkt als Ausgangspunkt für die Rechnung annehmen kann, da dieser mit dem Mittelpunkte der natürlichen Blende nahezu übereinstimmt. Bei der

trigonometrischen Durchrechnung von Teleobjektiven z. B. erhält man durch die Verwendung der Fundamentalstrahlen überhaupt erst die genügend gesicherten Anhaltspunkte.

Wenn auch unsere, an einen speziellen Fall angeknüpften Betrachtungen direkt für photographische Objektive nicht verwertbar sind, weil man eine Plankonvexlinse selbst als Landschaftslinse nicht verwenden wird, so zeigen sie doch das Wesen der natürlichen Blende und die Bedeutung der Hauptstrahlen recht anschaulich. Wir gehen jetzt dazu über, unsere Betrachtungen zu verallgemeinern und auf ein beliebiges zentriertes System auszudehnen.

§ 89. Umformung der Bedingung für die Komafreiheit auf Paraxialstrahlen.

Wir gehen jetzt wieder auf die Gleichung (254) des § 87 zurück und wollen zunächst für achsennahe Strahlen denjenigen Punkt suchen, durch welchen die Strahlen gehen müssen, welche nach der Brechung durch das System die Träger der kaustischen Spitze sind. Wir lassen zu dem Zwecke alle in dieser Gleichung vorkommenden Größen für das paraxiale Gebiet gelten, können dann also die Kosinusse der Neigungen gleich der Einheit und die Sinusse gleich den zugehörigen Bögen setzen. Die einzelnen in den Summanden der Gleichung (254) vorkommenden Faktoren werden dann:

1. zufolge Gleichung (253) in § 86 wird, wenn man statt der Schnittweiten t jetzt die paraxialen Schnittweiten c gemäß § 76 setzt,

$$\frac{ds_\varkappa}{ds_1} = \frac{c_\varkappa \cdot c_{\varkappa-1} \ldots c_2}{c'_{\varkappa-1}\, c'_{\varkappa-2} \ldots c'_1} = A_\varkappa\,, \tag{259}$$

indem wir der Kürze wegen für diesen Ausdruck das Zeichen $A_\varkappa$ einführen.

2. Die Größe $Q_\varkappa = n_\varkappa \sin i_\varkappa = n'_\varkappa \sin i'_\varkappa$ wird in diesem Falle $n_\varkappa\, i_\varkappa = n'_\varkappa\, i'_\varkappa$.

3. Der Ausdruck $Q^I_\varkappa$ geht in diesem Falle in die Nullinvariante [Gleichung (203) § 76] über. Da sich unsere nächsten Betrachtungen nur auf das paraxiale Gebiet beziehen, so können wir bezeichnen:

$$n'_\varkappa\left(\frac{1}{r_\varkappa} - \frac{1}{c'_\varkappa}\right) = n_\varkappa\left(\frac{1}{r_\varkappa} - \frac{1}{c_\varkappa}\right) = Q^I_\varkappa = Q_{\varkappa c}\,, \tag{260}$$

wo der Index c an Q darauf hinweist, daß die paraxialen Schnittweiten c in Frage kommen.

4. Der Ausdruck $\Delta\left(\frac{1}{n\,t}\right)_\varkappa$ geht über in

$$\Delta\left(\frac{1}{n\,c}\right)_\varkappa = \frac{1}{n'_\varkappa c'_\varkappa} - \frac{1}{n_\varkappa c_\varkappa} = B_\varkappa\,. \tag{260a}$$

Formel (254) wird demnach:

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=\lambda}\left(\frac{ds_\varkappa}{ds_1}\right)^3 Q^I_\varkappa\,\Delta\left(\frac{1}{n\,t}\right)_\varkappa n_\varkappa\, i_\varkappa = 0\,, \tag{260b}$$

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=\lambda} A^3_\varkappa B_\varkappa Q_{\varkappa c}\, n_\varkappa\, i_\varkappa = 0\,. \tag{261}$$

Ist nun im paraxialen Gebiete ein leuchtender Punkt gegeben, der jedoch nicht auf der Achse, sondern etwa in der Entfernung y davon liegen soll, so sind die Größen $A_\varkappa, B_\varkappa, Q_{\varkappa c}$ vollständig bestimmt, da diese nur von den Schnittweiten vor und nach den verschiedenen Brechungen, d. h. von den Größen $c_\varkappa$ und $c'_\varkappa$, abhängen.

Diese Schnittweiten erhält man aber vom Fußpunkte des Lotes y ausgehend leicht durch sukzessive Anwendung der Formeln (201) in § 76.

Gleichung (261) stellt nun einen linearen Zusammenhang zwischen den sämtlichen Einfallswinkeln $i_\varkappa$ dar, welche sukzessive an den aufeinander folgenden Flächen entstehen.

Derjenige von dem gegebenen Objektpunkte ausgehende Strahl, dessen sämtliche Einfallswinkel der Gleichung (261) genügen, ist der von uns gesuchte: der Träger der kaustischen Spitze nach der Brechung im Bildraume.

§ 90. Die natürliche Blende für ein beliebiges zentriertes System.

Wegen der Wichtigkeit des Gegenstandes für die photographische Optik wollen wir die Sachlage an einer Figur noch näher erläutern.

Sei PQ in Figur 51 ein Objekt vor dem brechenden Systeme, so gehen, selbst wenn wir uns auf achsennahe Strahlen beschränken, von Q unendlich viele Strahlen aus, die allerdings innerhalb eines Raumwinkels von geringer Öffnung konzentriert sind.

Es handelt sich jetzt darum, denjenigen von Q ausgehenden Strahl zu finden, der nach der Brechung, als Strahl CD durch die Spitze Q' der von Q erzeugten kaustischen Linie geht. Insbesondere ist es unsere Aufgabe, den Punkt B — den Mittelpunkt der natürlichen Blende im Objektraume — zu finden, in welchem dieser

Strahl die Achse schneidet. Es wird sich nämlich, wie hier vorgreifend schon bemerkt sei, ergeben, daß die Lage dieses Punktes unabhängig ist von der Größe des Objektes $y = PQ$, wenigstens unter der Voraussetzung, daß es sich um geringe Strahlenneigungen handelt, d. h. daß jedem konjugierten Ebenenpaare ein natürlicher Blendenmittelpunkt angehört.

Der Strahl $QBCQ'$ (Fig. 51) ist, wie schon erörtert, vor allen übrigen von Q ausgehenden Strahlen dadurch ausgezeichnet, daß seine

Fig. 51.

Einfallswinkel $i_\varkappa$ an den Flächen des Systemes der Gleichung (261) Genüge leisten müssen. Diese Gleichung (261) muß uns also dazu verhelfen, den Punkt B zu bestimmen. Man kann das gewünschte Ziel auf verschiedenem Wege erreichen. Einen dieser möglichen Wege hat der Verfasser bereits angegeben (Verhandlungen der Phys. Gesellschaft, V. Jahrg., Nr. 9, S. 193 u. f.). Die folgende Methode, die sich auf die Anwendung zweier schon von Seidel gegebenen Sätze stützt, bietet für die numerische Rechnung vielleicht einige Vorteile dar. Ehe wir jedoch dieser Lösung näher treten, wollen wir die in der Gleichung (261) auftretende Invariante $n_\varkappa i_\varkappa$ einer Transformation unterwerfen.

§ 91. Transformation der Invarianten $n_\varkappa i_\varkappa$.

In Figur 52 sei PAB ein auf die $\varkappa^{te}$ Kugelfläche fallender Strahl, und zwar stellen wir uns darunter denjenigen Strahl vor, der in Figur 51 dargestellt ist und also im Objektraume durch den Mittelpunkt B der natürlichen Blende geht. Es sei $MA = r_\varkappa = S_\varkappa M$ der Radius dieser Fläche und MAN das Einfallslot. Wir setzen, wie früher, da wir paraxialen Strahlengang voraussetzen:

$$AB = S_\varkappa B = x_\varkappa\,, \quad \sphericalangle\, PAN = i_\varkappa = \sphericalangle\, BAM\,,$$
$$AS_\varkappa = j_\varkappa\,, \quad \sphericalangle\, AMS_\varkappa = \varphi_\varkappa\,,$$
$$\sphericalangle\, PBS_\varkappa = u_\varkappa$$

und bemerken, daß $AS_\varkappa = j_\varkappa$ als eine sehr kleine achsensenkrechte Strecke aufgefaßt werden kann, und daß das Zeichen $x_\varkappa$ nicht zu ver-

Fig. 52.

wechseln ist mit dem früher gebrauchten Zeichen x, das sich auf die von den Brennpunkten aus gerechneten Schnittweiten bezog.

Es ist nun:

$$i_\varkappa = \varphi_\varkappa - u_\varkappa\,,$$

$$\varphi_\varkappa = \frac{j_\varkappa}{r_\varkappa}\,,\qquad u_\varkappa = \frac{j_\varkappa}{x_\varkappa}\,,$$

also:

(262)
$$n_\varkappa i_\varkappa = j_\varkappa n_\varkappa \left(\frac{1}{r_\varkappa} - \frac{1}{x_\varkappa}\right).$$

Die Invariante $n_\varkappa i_\varkappa$ stellt sich also dar als die bereits in § 76 definierte Nullinvariante

(263)
$$Q_{\varkappa x} = n_\varkappa \left(\frac{1}{r_\varkappa} - \frac{1}{x_\varkappa}\right)$$

multipliziert mit der zugehörigen Einfallshöhe $j_\varkappa$, so daß man hat:

(264)
$$n_\varkappa i_\varkappa = j_\varkappa Q_{\varkappa x}\,.$$

Gleichung (261) wird demnach:

(265)
$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=\lambda} A_\varkappa^3 B_\varkappa Q_{\varkappa c} Q_{\varkappa x} j_\varkappa = 0\,.$$

Wir haben also in Gleichung (265) jetzt zwei verschiedene Nullinvarianten.

Die erste ($Q_{\varkappa c}$) kann aufgefaßt werden als zu einem Strahl gehörig, der vom Fußpunkte P des Objektes $y = PQ$ in Figur 51 ausgeht, während die andere ($Q_{\varkappa x}$) einem von Q aus fahrenden, durch den Mittelpunkt der natürlichen Blende B (Fig. 51) gehenden Strahl angehört, der also im Objektraume von B ausgehend zu denken ist, so daß also in Figur 51 $BS = x_1$ die erste Schnittweite wäre.

§ 92. Die Seidelschen Sätze über Nullinvarianten.

Für zwei ein vorliegendes System im paraxialen Gebiete durchlaufende Strahlen seien die beiden Nullinvarianten:

$$Q_{\varkappa x} = n'_\varkappa\left(\frac{1}{r_\varkappa} - \frac{1}{x'_\varkappa}\right) = n_\varkappa\left(\frac{1}{r_\varkappa} - \frac{1}{x_\varkappa}\right), \tag{266}$$

$$Q_{\varkappa c} = n'_\varkappa\left(\frac{1}{r_\varkappa} - \frac{1}{c'_\varkappa}\right) = n_\varkappa\left(\frac{1}{r_\varkappa} - \frac{1}{c_\varkappa}\right). \tag{267}$$

Demnach ist auch:

$$Q_{\varkappa x} - Q_{\varkappa c} = n'_\varkappa\left(\frac{1}{c'_\varkappa} - \frac{1}{x'_\varkappa}\right) = n_\varkappa\left(\frac{1}{c_\varkappa} - \frac{1}{x_\varkappa}\right). \tag{267a}$$

Ferner hat man infolge sinngemäßer Anwendung der zweiten der Gleichungen (201) in § 76

$$c_\varkappa = c'_{\varkappa-1} - d_{\varkappa-1}, \quad x_\varkappa = x'_{\varkappa-1} - d_{\varkappa-1}, \tag{267b}$$

und außerdem ist

$$n_\varkappa = n'_{\varkappa-1},$$

und man erhält sukzessive:

$$\left\{\begin{aligned} Q_{\varkappa x} - Q_{\varkappa c} &= n'_{\varkappa-1}\left(\frac{1}{c'_{\varkappa-1} - d_{\varkappa-1}} - \frac{1}{x'_{\varkappa-1} - d_{\varkappa-1}}\right) \\ &= \frac{n'_{\varkappa-1}\, c'_{\varkappa-1}\, x'_{\varkappa-1}\,(x'_{\varkappa-1} - c'_{\varkappa-1})}{c'_{\varkappa-1}\, x'_{\varkappa-1}\, c_\varkappa\, x_\varkappa} \\ &= \frac{c'_{\varkappa-1}\, x'_{\varkappa-1}}{c_\varkappa x_\varkappa}\,(Q_{\varkappa-1,\,x} - Q_{\varkappa-1,\,c}). \end{aligned}\right. \tag{268}$$

Der Strahl mit den Schnittweiten $c_\varkappa$ möge die $\varkappa^{\text{te}}$ Fläche in der Höhe $h_\varkappa$ über der Achse schneiden, während die analoge Größe für den Strahl mit den Schnittweiten $x_\varkappa$ durch $j_\varkappa$ ausgedrückt sei, dann lehrt eine einfache Proportion:

$$\frac{c'_{\varkappa-1}}{c_\varkappa} = \frac{h_{\varkappa-1}}{h_\varkappa}, \quad \frac{x'_{\varkappa-1}}{x_\varkappa} = \frac{j_{\varkappa-1}}{j_\varkappa},$$

und Gleichung (268) wird:

$$Q_{\varkappa x} - Q_{\varkappa c} = \frac{j_{\varkappa-1}\, h_{\varkappa-1}}{j_\varkappa\, h_\varkappa}\,(Q_{\varkappa-1,\,x} - Q_{\varkappa-1,\,c}). \tag{269}$$

Analog würde man haben:

$$Q_{\varkappa-1,\,x} - Q_{\varkappa-1,\,c} = \frac{j_{\varkappa-2}\, h_{\varkappa-2}}{j_{\varkappa-1}\, h_{\varkappa-1}}\,(Q_{\varkappa-2,\,x} - Q_{\varkappa-2,\,c}).$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt:

$$Q_{\varkappa x} - Q_{\varkappa c} = \frac{j_{\varkappa-2}\, h_{\varkappa-2}}{j_\varkappa h_\varkappa} (Q_{\varkappa-2,\,x} - Q_{\varkappa-2,\,c})\,.$$

Fährt man in dieser Weise fort, so ergibt sich schließlich:

$$Q_{\varkappa x} - Q_{\varkappa c} = \frac{j_1 h_1}{j_\varkappa h_\varkappa} (Q_{1\,x} - Q_{1\,c})\,. \tag{270}$$

Ein weiterer von Seidel entwickelter Satz ergibt sich auf folgende Weise:

In Figur 52 ziehe man AC achsenparallel zwischen der $\varkappa - 1^{\text{ten}}$ und $\varkappa^{\text{ten}}$ Fläche. Dann ist

$$CP = h_{\varkappa-1} - h_\varkappa\,, \quad AC = d_{\varkappa-1}\,,$$

folglich ergibt eine einfache Proportion an ähnlichen Dreiecken:

$$\frac{h_{\varkappa-1} - h_\varkappa}{h_{\varkappa-1}} = \frac{d_{\varkappa-1}}{c'_{\varkappa-1}}\,.$$

Ganz analog würde sich für den Strahl mit den Schnittweiten x ergeben:

$$\frac{j_{\varkappa-1} - j_\varkappa}{j_{\varkappa-1}} = \frac{d_{\varkappa-1}}{x'_{\varkappa-1}}\,.$$

Durch Subtraktion dieser Gleichungen entsteht

$$\frac{h_\varkappa}{h_{\varkappa-1}} - \frac{j_\varkappa}{j_{\varkappa-1}} = d_{\varkappa-1}\left(\frac{1}{x'_{\varkappa-1}} - \frac{1}{c'_{\varkappa-1}}\right).$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $\frac{j_{\varkappa-1}}{h_\varkappa}$ und berücksichtigt Gleichung (267a), nachdem man darin den Index $\varkappa$ durch $\varkappa - 1$ ersetzt hat, so erhält man:

$$\frac{j_{\varkappa-1}}{h_{\varkappa-1}} - \frac{j_\varkappa}{h_\varkappa} = d_{\varkappa-1}\frac{j_{\varkappa-1}}{h_\varkappa}(Q_{\varkappa-1,\,x} - Q_{\varkappa-1,\,c})\frac{1}{n'_{\varkappa-1}}$$

oder unter Benutzung von Gleichung (270):

$$\frac{j_\varkappa}{h_\varkappa} = \frac{j_{\varkappa-1}}{h_{\varkappa-1}} + h_1 j_1 (Q_{1\,x} - Q_{1\,c})\frac{d_{\varkappa-1}}{h_{\varkappa-1} h_\varkappa n_\varkappa}\,.$$

Denkt man sich die letzte Gleichung für alle Indizes von $\lambda = 2, 3 \ldots, \varkappa - 1, \varkappa$ hingeschrieben und addiert, so wird:

$$\frac{j_\varkappa}{h_\varkappa} = \frac{j_1}{h_1} + h_1 j_1 (Q_{1\,x} - Q_{1\,c}) \sum_{\lambda=2}^{\lambda=\varkappa} \frac{d_{\lambda-1}}{h_{\lambda-1} h_\lambda n_\lambda}\,. \tag{271}$$

§ 93. Bestimmung des Ortes der natürlichen Blende.

Mittels der beiden Seidelschen Sätze [Gleichung (270) und (271)] gelingt nun die Bestimmung des Ortes der natürlichen Blende im Objektraume auf folgende Weise.

Der Kürze halber setzen wir:

$$Q_{1x} - Q_{1c} = z \tag{272}$$

und bedenken, daß der Ausdruck $\frac{h_\varkappa}{h_1}$ mit dem durch Gleichung (259) definierten Ausdrucke $A_\varkappa$ identisch ist, so daß man also hat:

$$\frac{h_\varkappa}{h_1} = A_\varkappa . \tag{273}$$

Dann liefert zunächst Gleichung (270):

$$j_\varkappa A_\varkappa Q_{\varkappa x} - j_\varkappa A_\varkappa Q_{\varkappa c} = j_1 z \tag{274}$$

und Gleichung (271), nachdem man sie auf beiden Seiten mit $\frac{h_\varkappa}{j_1}$ multipliziert hat:

$$\frac{j_\varkappa}{j_1} = A_\varkappa + A_\varkappa z \sum_{\lambda=2}^{\lambda=\varkappa} \frac{d_{\lambda-1}}{n_\lambda A_{\lambda-1} A_\lambda},$$

oder, wenn wir

$$\sum_{\lambda=2}^{\lambda=\varkappa} \frac{d_{\lambda-1}}{n_\lambda A_{\lambda-1} A_\lambda} = C_\varkappa \tag{275}$$

setzen:

$$\frac{j_\varkappa}{j_1} = A_\varkappa + A_\varkappa z C_\varkappa . \tag{276}$$

Aus Gleichung (274) und (276) folgt:

$$\frac{j_\varkappa A_\varkappa Q_{\varkappa x}}{j_1} - (A_\varkappa + A_\varkappa z C_\varkappa) A_\varkappa Q_{\varkappa c} = z$$

oder:

$$\frac{j_\varkappa}{j_1} A_\varkappa Q_{\varkappa x} = A_\varkappa^2 Q_{\varkappa c} + z(1 + A_\varkappa^2 C_\varkappa Q_{\varkappa c}) .$$

Setzen wir diesen Wert für $\frac{j_\varkappa}{j_1} A_\varkappa Q_{\varkappa x}$ in Gleichung (265) ein, nachdem wir diese durch die in bezug auf $\varkappa$ konstante Größe j_1 dividiert haben, so erhalten wir:

$$\sum A_\varkappa^2 B_\varkappa Q_{\varkappa c} [A_\varkappa^2 Q_{\varkappa c} + z(1 + A_\varkappa^2 C_\varkappa Q_{\varkappa c})] = 0 , \tag{277}$$

wo die Summierung von $\varkappa = 1$ bis $\varkappa = m$ auszudehnen ist, wenn das System aus m brechenden Flächen besteht.

Die Gleichung (277) ist linear in bezug auf die Unbekannte z. Ist die letztere bestimmt, so folgt Q_{1x} aus Gleichung (272): $Q_{1x} - Q_{1c} = z$ und dann die gesuchte Entfernung x_1 des Mittelpunktes der natürlichen Blende im Objektraume aus der Gleichung

$$Q_{1x} = n_1 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{x_1}\right). \tag{278}$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt noch:

$$n_1 \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{x_1}\right) = z, \tag{278a}$$

oder für $c_1 = \infty$ und $n_1 = 1$:

$$x_1 = -\frac{1}{z}.$$

Die Größen $A_\varkappa$, $B_\varkappa$, $Q_{\varkappa c}$, $C_\varkappa$ sind bestimmt durch die Gleichungen (259), (260a), (260), (275). Bemerkt sei noch, daß das Symbol C_1 den Wert 0, das Symbol A_1 den Wert 1 hat.

§ 94. Einige spezielle Fälle.

1. Die plankonvexe Linse.

Wir wollen ein unendlich fernes Objekt, also $c_1 = \infty$, annehmen. Setzen wir dann noch eine plankonvexe Linse, also $r_1 = \infty$, voraus, so ist $Q_{1c} = 0$. Zur Bestimmung von x_1 hätten wir die Gleichung (277) für den Index $\varkappa = 1$ und $\varkappa = 2$ hinschreiben müssen. Wegen $Q_{1c} = 0$ reduziert sich die Summe auf das eine Glied:

$$A_2^2 Q_{2c} + z(1 + A_2^2 C_2 Q_{2c}) = 0. \tag{279}$$

Es ist aber wegen $Q_{1c} = 0$ auch $c_1' = \infty$ und zufolge der Gleichung (267b) S. 154 auch $c_2 = \infty$. Folglich wird

$$Q_{2c} = \frac{n_2}{r_2},$$

während c_2' durch die Gleichung

$$\frac{n_2}{r_2} = n_2' \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{c_2'}\right)$$

bestimmt ist.

$A_2 = \frac{c_2}{c_1'}$ ergibt sich in diesem speziellen Falle aus Gleichung (259) gleich $\frac{\infty}{\infty}$, hat also einen unbestimmten Wert. Die Anschauung lehrt aber unmittelbar, daß $A_2 = 1$ ist.

Aus Gleichung (275) folgt

$$C_2 = \frac{d_1}{n_2 A_1 A_2} = \frac{d_1}{n_2} .$$

Gleichung (279) liefert also:

$$\frac{n_2}{r_2} + z\left(1 + \frac{n_2}{r_2}\frac{d_1}{n_2}\right) = 0 ,$$

woraus

$$n_2 + z(r_2 + d_1) = 0$$

oder

$$z = -\frac{n_2}{r_2 + d_1}$$

folgt. Nun ist nach Gleichung (272)

$$Q_{1x} = z + Q_{1c} = -\frac{n_2}{r_2 + d_1} + Q_{1c} ,$$

und also nach Gleichung (278), wegen $r_1 = \infty$,

$$-\frac{n_2}{r_2 + d_1} = -\frac{n_1}{x_1} ,$$

also

$$x_1 = \frac{n_1}{n_2}(r_2 + d_1) , \tag{280}$$

eine Gleichung, die mit der Formel (258) S. 146 übereinstimmt, wenn man hier den vorausgesetzten Sinn der Zählung berücksichtigt.

2. Fall, daß man die Dicken vernachlässigen kann.

Kann man in einem Systeme die Dicken vernachlässigen, so ist ersichtlich $A_\varkappa = 1$ und $C_\varkappa = 0$.

Gleichung (277) ergibt in diesem Falle:

$$\Sigma B_\varkappa Q_\varkappa (Q_\varkappa + z) = 0$$

oder

$$\sum Q_\varkappa^2 \Delta\left(\frac{1}{nc}\right)_\varkappa + z \sum Q_\varkappa \Delta\left(\frac{1}{nc}\right)_\varkappa = 0$$

$$z = -\frac{\sum Q_\varkappa^2 \Delta\left(\frac{1}{nc}\right)_\varkappa}{\sum Q_\varkappa \Delta\left(\frac{1}{nc}\right)_\varkappa} . \tag{281}$$

3. Fall einer einzigen dünnen, von Luft umgebenen Linse.

Hier hat man zunächst:

$$Q_1 = n_1\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{c_1}\right) = n_1'\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{c_1'}\right),$$

$$Q_2 = n_2\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{c_2}\right) = n_2'\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{c_2'}\right)$$

$$\text{und} \quad c_2 = c_1'.$$

Bezeichnet man mit n den Brechungsexponenten der Linse, so ist

$$n_1 = n_2' = 1,$$

$$n_1' = n_2 = n.$$

Setzt man dann ferner noch:

$$c_1 = a, \qquad c_2' = b, \qquad \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right),$$

und setzt weiter noch $a = \infty$, $b = f$, nimmt also an, daß das Objekt sehr entfernt sei, dann wird:

$$Q_1 = \frac{1}{r_1} = n\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{c_1'}\right),$$

$$Q_2 = n\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{c_2}\right) = \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{f}\right)$$

und also

$$\frac{1}{c_1'} = \frac{1}{c_2} = \frac{n-1}{n r_1},$$

$$\varDelta\left(\frac{1}{nc}\right)_1 = \frac{1}{n_1' c_1'} - \frac{1}{n_1 c_1} = \frac{n-1}{n^2 r_1},$$

$$\varDelta\left(\frac{1}{nc}\right)_2 = \frac{1}{n_2' c_2'} - \frac{1}{n_2 c_2} = \frac{1}{f} - \frac{n-1}{n^2 r_1},$$

also wird:

$$(282) \qquad s = -\frac{\dfrac{1}{r_1^2}\dfrac{n-1}{n^2 r_1} + \left(\dfrac{1}{r_2} - \dfrac{1}{f}\right)^2\left(\dfrac{1}{f} - \dfrac{n-1}{n^2 r_1}\right)}{\dfrac{1}{r_1}\dfrac{n-1}{n^2 r_1} + \left(\dfrac{1}{r_2} - \dfrac{1}{f}\right)\left(\dfrac{1}{f} - \dfrac{n-1}{n^2 r_1}\right)}.$$

Setzen wir z. B., um noch ein einfaches Zahlenbeispiel zu geben:

$$r_1 = 1,$$

$$r_2 = 2,$$

$$n = \tfrac{3}{2},$$

so ergibt sich

$$f = 4\,, \qquad Q_{1c} = 1\,, \qquad Q_{2c} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4}\,,$$

$$\Delta\left(\frac{1}{nc}\right)_1 = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{9}{4}} = \tfrac{2}{9}\,, \qquad \Delta\left(\frac{1}{nc}\right)_2 = \tfrac{1}{4} - \tfrac{2}{9} = \tfrac{1}{36}\,,$$

also wird

$$-z = \frac{1^2 \cdot \frac{2}{9} + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{36}}{1 \cdot \frac{2}{9} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{36}} = \frac{8 + \frac{1}{16}}{8 + \frac{1}{4}} = \frac{128 + 1}{128 + 4} = \frac{129}{132} = \frac{43}{44}\,;$$

$$z = -\tfrac{43}{44}\,.$$

Ferner ist:

$$Q_{1x} - Q_{1c} = z\,,$$

also

$$Q_{1x} = +1 - \tfrac{43}{44} = \tfrac{1}{44}\,.$$

Ferner war nach Gleichung (278)

$$Q_{1x} = n_1\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{x_1}\right),$$

also ist:

$$\tfrac{1}{44} = 1 - \frac{1}{x_1}\,; \qquad \frac{1}{x_1} = 1 - \tfrac{1}{44} = \tfrac{43}{44}\,; \qquad x_1 = 1\tfrac{1}{43}\,.$$

Bei einem Meniskus von der Brennweite 4 und dem Brechungsexponenten 1,5, dessen erste Fläche doppelt so stark gekrümmt ist als die zweite, liegt also der Mittelpunkt der natürlichen Blende um $1^1/_{43}$ nach rechts vom Scheitel entfernt. Die Gleichung (282) stimmt übrigens mit der vom Verfasser l. c. entwickelten überein, obschon sie in der Form sehr abweichend ist.

Kapitel 10.

Orthoskopie und Helligkeit.

§ 95. Bedingung für die Orthoskopie.

Wenn man das Bild, das ein photographisches Objektiv entwirft, auf einer Mattscheibe auffängt, so kann es eine ganze Anzahl dioptrischer Mängel zeigen, wie Astigmatismus, Koma, sphärische Aberration usw. Wir wollen nun einen bestimmten Mangel, den man „Verzeichnung“ nennt, isolieren und die Bedingung für seine Hebung angeben. Unter Verzeichnung versteht man die Erscheinung, daß das Bild dem Objekte nicht ähnlich ist, was sich insbesondere dadurch dokumentiert, daß gerade Linien im Objektraume als krumme Linien auf der Mattscheibe erscheinen. Wählt man als Objekt ein System paralleler Geraden

Fig. 53. Fig. 54. Fig. 55.

(Fig. 53), so können die von der Mitte des Feldes entfernteren Geraden entweder konkav (Fig. 54) oder konvex (Fig. 55) gekrümmt sein. Im ersteren Falle nennt man die Verzeichnung „kissenförmig“, im anderen „tonnenförmig“.

Bei einem unscharfen Bilde auf der Mattscheibe kann man im Zweifel sein, wie man dort überhaupt den Begriff „Bildpunkt“ definieren soll. Wir wollen ihn als den Punkt bezeichnen, in welchem ein Fundamentalstrahl bei weitgeöffneter Blende, oder bei sehr enger Blende auch ein Hauptstrahl im gewöhnlichen Sinne, die Mattscheibe durchstößt. Ob dieser Punkt optisch wirklich vorhanden ist, oder ob er nur die Mitte eines durch sphärische oder astigmatische usw.

Abweichungen erzeugten Zerstreuungskreises ist, bleibt für unsere Zwecke belanglos.

Seien nun in Figur 56 R und R' die Mittelpunkte der (EP) und (AP), und nehmen wir an, daß R und R' aberrationsfreie Punkte seien, sei ferner PQ_1Q_2 ein achsensenkrechtes ebenes Objekt, so

Fig. 56.

werden, falls die Aperturblende mit der natürlichen Blende zusammenfällt, Q_1R und Q_2R objektseitige Fundamentalstrahlen sein, denen die bildseitigen Fundamentalstrahlen $R'Q_1'$ und $R'Q_2'$ entsprechen.

Sind ferner P und P' konjugierte Achsenpunkte und P' zugleich der Punkt, in dem die Achse die Mattscheibe durchstößt, und setzt man

$$\sphericalangle PRQ_1 = w_1, \quad \sphericalangle P'R'Q_1' = w_1', \quad PQ_1 = y_1, \quad P'Q_1' = y_1', \quad PR = \xi,$$
$$\sphericalangle PRQ_2 = w_2, \quad \sphericalangle P'R'Q_2' = w_2', \quad PQ_2 = y_2, \quad P'Q_2' = y_2', \quad P'R' = \xi',$$

so hat man, wie ein Blick auf Figur 56 lehrt:

$$\operatorname{tg} w_1 = \frac{y_1}{\xi}, \qquad \operatorname{tg} w_1' = \frac{y_1'}{\xi'},$$
$$\operatorname{tg} w_2 = \frac{y_2}{\xi}, \qquad \operatorname{tg} w_2' = \frac{y_2'}{\xi'}.$$

Indem man eine größere Anzahl von Objektpunkten betrachtet, könnte man diese Gleichungen in beliebig großer Anzahl aufstellen, man hätte dann die Indizes 1, 2 entsprechend zu vermehren.

Damit Objekt und Bild auf der Mattscheibe in den einzelnen Teilen ähnlich sind, müssen offenbar die Quotienten

$$\frac{y_1'}{y_1}, \quad \frac{y_2'}{y_2}, \quad \frac{y_3'}{y_3} \quad \text{usw.}$$

einander gleich sein. Unter Berücksichtigung der letzten Gleichungen erhalten wir demnach:

$$\frac{\xi'}{\xi}\,\frac{\operatorname{tg} w_1'}{\operatorname{tg} w_1} = \frac{\xi'}{\xi}\,\frac{\operatorname{tg} w_2'}{\operatorname{tg} w_2} = \frac{\xi'}{\xi}\,\frac{\operatorname{tg} w_3'}{\operatorname{tg} w_3} \quad \text{usw.}$$

Da der Quotient $\frac{\xi'}{\xi}$ von den Neigungen der Fundamentalstrahlen unabhängig ist, so folgt als Bedingung für die „Verzeichnungsfreiheit“ oder Orthoskopie, daß die Quotienten aus den Tangenten der Neigungen der Fundamentalstrahlen im Objektraume und Bildraume konstant sein müssen. Nennt man allgemein diese Neigungen w und w', so hat man also die Bedingung

$$\frac{\operatorname{tg} w'}{\operatorname{tg} w} = \text{const}$$

für alle Werte von w' und w.

Die Konstante auf der rechten Seite dieser Gleichung können wir leicht durch die Bemerkung bestimmen, daß diese Gleichung auch für paraxiale Strahlen gelten muß.

Für diesen Fall geht aber $\frac{\operatorname{tg} w'}{\operatorname{tg} w}$ in $\frac{w'}{w}$, d. h. in das Konvergenzverhältnis in den Pupillen über, das den Wert $\frac{n}{n'}\frac{1}{B}$ hat, wenn n und n' die Brechungsexponenten im Objektraume und Bildraume und B die Vergrößerung in den Pupillen bedeutet. Findet die Abbildung mittels Fundamentalstrahlen statt, so ist natürlich B das Vergrößerungsverhältnis im Mittelpunkte der natürlichen Blende im Objektraume und in dem durch das ganze System erzeugten Bildpunkte dieses Mittelpunktes.

Die Bedingung für die Orthoskopie wird also:

$$\frac{\operatorname{tg} w'}{\operatorname{tg} w} = \frac{n}{n'}\frac{1}{B}. \tag{283}$$

Die Form dieser Gleichung erinnert an die Sinusbedingung, welche letztere jedoch, wie früher ausgeführt, in dem Objekt- und Bildpunkt (P und P' in Fig. 33) erfüllt sein muß. Im paraxialen Gebiete werden beide Bedingungen identisch und fallen mit dem Lagrangeschen Satze zusammen. Ist das oben angegebene Tangentenverhältnis nicht konstant, so ist entweder kissenförmige oder tonnenförmige Verzeichnung vorhanden, je nachdem dieses Verhältnis nach dem Rande hin zu- oder abnimmt.

Ist die bei unseren Entwicklungen vorausgesetzte Aberrationsfreiheit in den Pupillen nicht vorhanden, so treten infolgedessen Verzeichnungsfehler auf, selbst wenn die Bedingung (283) erfüllt ist. Diese Abweichungen sind jedoch meist so gering, daß sie vernachlässigt werden können. Daß man für einfache Landschaftslinsen diese Korrektion immer ausführen kann, wurde schon S. 65 bemerkt.

§ 96. Orthoskopie symmetrischer Objektive.

Bei symmetrischen Objektiven sind, wie wir unten noch zeigen werden (§ 99), die durch den Symmetriepunkt gehenden Hauptstrahlen als Fundamentalstrahlen aufzufassen. Für diese Hauptstrahlen ist immer $w = w'$. Ferner ist hier ersichtlich $B = 1$ und $n = n'$. Es ist demnach die Gleichung (283) identisch erfüllt.

Abgesehen von den Aberrationen in den Pupillen sind also symmetrische Objektive frei von Verzeichnung.

§ 97. Zerstreuungskreise und Tiefe.

Sei in Figur 21 S. 46 L' der Punkt, in welchem die optische Achse die Mattscheibe durchstößt, so erscheint auf der Mattscheibe das Bild des Gegenstandes scharf abgebildet, der sich in der zur Mattscheibe konjugierten Ebene im Objektraume befindet, die etwa durch den Punkt L der Achse gehen möge. Alle übrigen Punkte des Objektraumes können auf der Mattscheibe nicht scharf erscheinen, sondern werden nur sichtbar durch Zerstreuungskreise, die sie erzeugen. Sei nun Q ein solcher beliebig gelegener Punkt im Objektraume, der also vor oder hinter der durch L gehenden achsensenkrechten Ebene liegt, so kann man mittels der Punkte R und R' leicht den Mittelpunkt des zu Q gehörigen Zerstreuungskreises auf der Mattscheibe finden. Zu dem Zwecke ziehe man QR und messe den Winkel $QRL = w$. Dann trage man den Winkel $w \cdot \Gamma$, wo Γ das Konvergenzverhältnis in den Pupillen ist, von R' nach unten ab. Der freie Schenkel $R'Q'$ durchstößt die Mattscheibe in dem Mittelpunkte des gesuchten Zerstreuungskreises.

Wir berechnen jetzt den Radius

$$\mu = T'L'$$

des Zerstreuungskreises, der von einem Punkte P auf der Achse herrührt.

Aus Figur 21 ergibt sich sofort:

$$\frac{T'L'}{A'R'} = \frac{L'P'}{R'P'}. \tag{284}$$

Berücksichtigt man, daß $PR = \xi$, $P'R' = \xi'$ und $L'P' = \xi' - m'$ ist, wo m' die Entfernung der Mattscheibe von R' bedeutet und $A'R' = \varrho'$ der Radius der (AP) ist, so liefert Gleichung (284)

$$\mu = \frac{(\xi' - m')\,\varrho'}{\xi'}. \tag{285}$$

Bezieht man die konjugierten Punkte L, L' und P, P' auf die Brennpunkte des Systemes und nennt die zugehörigen Schnittweiten l, l' resp. x, x', so bestehen bekanntlich folgende Beziehungen. (Vgl. § 33.)

$$\text{(285a)} \quad \begin{cases} x x' = f f', & x = \xi - \dfrac{f}{B}, \quad x' = \xi' - f'B, \\ l l' = f f', & l = m - \dfrac{f}{B}, \quad l' = m' - f'B. \end{cases}$$

Mit Hilfe dieser Beziehungen kann man der Gleichung (285) die Form:

$$\text{(286)} \qquad \mu = f \frac{\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{l}\right)}{\dfrac{f}{x} + B} \varrho'$$

geben, wobei noch daran erinnert sei, daß das Vergrößerungsverhältnis B in den Pupillen mit den Radien ϱ und ϱ' der (EP) und (AP) durch die Gleichung $\dfrac{\varrho'}{\varrho} = B$ verbunden ist.

Solange der Durchmesser 2μ so klein ist, daß ein die Mattscheibe aus der gewöhnlichen Sehweite betrachtendes Auge den Zerstreuungskreis noch nicht als ausgedehntes Objekt, sondern nur als Punkt wahrnimmt, wird auch das betreffende mittels Zerstreuungskreisen abgebildete Objekt scharf erscheinen. Diesen Vorgang bezeichnet man als „Tiefe“ des Objektives.

Man kann annehmen, daß ein normales Auge in der Entfernung von 250 mm ein Objekt noch punktförmig sieht, wenn es unter einem Sehwinkel erscheint, der kleiner ist als eine Minute. Im Grenzfalle besteht also die Gleichung:

$$\operatorname{tg} 1' = \frac{2\mu}{250},$$

woraus

$$2\mu = 250 \cdot 0{,}00029$$

oder

$$\text{(287)} \qquad 2\mu = 0{,}07 \text{ mm}$$

folgt. Setzt man diesen Wert für 2μ in Gleichung (286) ein, so kann diese Gleichung dazu dienen, für einen gegebenen Punkt L', d. h. für eine gegebene Einstellung des Objektives die Entfernung x desjenigen Punktes P zu bestimmen, der gerade noch scharf auf der Mattscheibe zur Abbildung gelangt.

Wir beschränken uns jedoch hier auf die Betrachtung des praktisch wichtigsten Falles, daß die Mattscheibe mit der Fokalebene zusammenfällt, also $l = \infty$ zu setzen ist. Aus (286) folgt dann:

$$\mu = \frac{f\varrho'}{f + Bx}$$

oder, wenn man $\varrho' = \varrho B$ setzt:

$$\mu = \frac{f\varrho}{x + \frac{f}{B}}.$$

Zufolge der Gleichungen (285a) auf S. 165 ist jedoch der Nenner der letzten Gleichung nichts anderes als die Entfernung des gesuchten Punktes P vom Mittelpunkte R der (EP). Man erhält also unter Berücksichtigung von (287)

$$0{,}035 = \frac{f\varrho}{\xi}$$

oder

$$\xi = \frac{f\varrho}{0{,}035}, \tag{288}$$

d. h. alle Objektpunkte, die weiter als ξ entfernt sind, werden scharf auf der Mattscheibe abgebildet.

Man erkennt also, daß die Tiefe photographischer Objektive nur von der Brennweite und von der Öffnung abhängt, vom Konstruktionstypus aber ganz unabhängig ist.

Ist z. B. $f = 200$, $\varrho = 10$, so hat man

$$\xi = \frac{2000}{0{,}035} = 57\,\text{m}.$$

Will man die „Tiefe T" mathematisch definieren, so muß man sie der Größe ξ in Gleichung (288) umgekehrt proportional setzen und hat, wenn c eine Proportionalitätskonstante bezeichnet

$$T = \frac{c}{f \cdot 2\varrho},$$

d. h. die Tiefe ist umgekehrt proportional dem Produkte aus Brennweite und Durchmesser der (EP).

§ 98. Helligkeit.

Um die Helligkeit der Bilder auf der Mattscheibe in verschiedenen Entfernungen von der Achse zu berechnen, müssen wir die vereinfachenden Annahmen machen, daß die Flächen der (EP) und (AP) kleine Größen seien, und daß die Bildwölbung und Verzeichnung aufgehoben seien.

Im Objektraume befinde sich nun (Fig. 57) auf der achsensenkrechten Geraden PL das Linienelement AL, dessen Bild $A'L'$ auf der Matt-

Fig. 57.

scheibe ebenfalls achsensenkrecht sei. Gibt man nun der Hauptebene, in der sich AL und $A'L'$ befinden (d. h. der Papierebene), eine unendlich kleine Drehung $d\psi$ um die optische Achse, so gelangt AL nach NK und $A'L'$ nach $N'K'$. Das objektseitige Flächenelement $ALNK = dq$ wird dann als Bild das Flächenelement $A'L'N'K' = dq'$ auf der Mattscheibe haben. Die Pupillenmitten bezeichnen wir mit R und R' und setzen

$$AP = e\,, \quad A'P' = e'\,, \quad PR = \xi\,, \quad P'R' = \xi'\,,$$
$$\sphericalangle\, ARP = w\,, \qquad \sphericalangle\, A'R'P' = w'\,.$$

Dann ist $e = \xi \operatorname{tg} w$, während AN als Bogen eines kleinen Kreises vom Radius e aufgefaßt werden kann und also den Wert $AN = e\, d\psi$ hat. Das Element AL muß als die Zunahme von $PA = e$ aufgefaßt werden und demnach mit de bezeichnet werden.

Es ist also:

$$dq = \overline{AN} \cdot \overline{AL} = e\, d\psi \cdot de = \xi^2 \operatorname{tg} w\, d(\operatorname{tg} w)\, d\psi\,,$$

$$dq = \tfrac{1}{2}\, \xi^2\, d(\operatorname{tg} w^2)\, d\psi\,.$$

Ganz analog ergibt sich:

$$dq' = \tfrac{1}{2}\, \xi'^2\, d(\operatorname{tg} w'^2)\, d\psi$$

und durch Division findet man:

$$\frac{dq}{dq'} = \left(\frac{\xi}{\xi'}\right)^2 \frac{d(\operatorname{tg} w^2)}{d(\operatorname{tg} w'^2)}\,. \tag{289}$$

Nach den Prinzipien der Photometrie strahlt von einem Flächenelement dq innerhalb eines Raumwinkels $d\Omega$ und zwar in einer um w zur Normalen des Flächenelementes geneigten Richtung eine Lichtmenge

$$dL = \varkappa\, dq\, d\Omega\, f(w) \tag{290}$$

aus, wenn $f(w)$ das Emanationsgesetz angibt, d. h. denjenigen Bruchteil des Lichtes bestimmt, welcher in der durch w charakterisierten Richtung ausstrahlt. Die Größe $\varkappa$ — die sogenannte spezifische Intensität — kennzeichnet die absolute Helligkeit von dq unabhängig von dem Gesetze der Ausbreitung der Strahlung und kann bei unseren Entwicklungen als konstant angenommen werden.

Die Lichtmenge dL dringt nun von dq aus durch die Öffnungen der Ein- und Austrittspupille hindurch, die wir mit $d\lambda$ und $d\lambda'$ bezeichnen wollen, und beleuchtet das Element dq' auf der Mattscheibe, wenn wir von der Absorption durch das Glasmaterial absehen. Als Helligkeit h in dq' definieren wir nun diejenige Lichtmenge, welche dort auf der Flächeneinheit vorhanden ist. Da die Lichtmenge dL auf die Fläche dq' übertragen wird, so befindet sich auf der Flächeneinheit von dq' die Menge $\frac{dL}{dq'}$, und man hat:

$$h = \frac{dL}{dq'} = \varkappa \frac{dq}{dq'}\, d\Omega\, f(w)\,. \tag{291}$$

Denken wir uns nun einen unendlich dünnen Strahlenkegel, der seine Spitze in irgend einem Punkte von dq hat und dessen Basis die Fläche der (EP) $= d\lambda$ ist, und schlagen wir um die Spitze dieses

Kegels eine Kugel mit dem Radius Eins, so hat der Teil dieser Kugelfläche, der innerhalb des Kegels liegt, die Größe $d\Omega$. Beachtet man ferner, daß dieser Kegel bei R einen Querschnitt gleich $d\lambda \cos w$ hat, so ergibt eine einfache Proportion:

$$\frac{d\lambda \cos w}{d\Omega} = \frac{\overline{AR}^2}{1},$$

woraus wegen $\overline{AR} = \frac{\xi}{\cos w}$ folgt:

$$d\Omega = \frac{d\lambda \cos w^3}{\xi^2}. \tag{292}$$

Analog ist:

$$d\Omega' = \frac{d\lambda' \cos w'^3}{\xi'^2}. \tag{293}$$

Mittels der Gleichungen (289), (292), (293) läßt sich jetzt der Ausdruck (291) für die Helligkeit auf der Mattscheibe in dq' schreiben:

$$h = \varkappa \left(\frac{\xi}{\xi'}\right)^2 d\lambda \frac{d(\operatorname{tg} w^2)}{d(\operatorname{tg} w'^2)} \frac{\cos w^3}{\xi^2} f(w). \tag{294}$$

Da wir annehmen, daß das System orthoskopisch ist, so muß gemäß Gleichung (283) S. 163 sein, wenn wir noch die Brechungsexponenten im Objekt- und Bildraume einander gleich setzen:

$$\frac{\operatorname{tg} w'}{\operatorname{tg} w} = \frac{1}{B}, \tag{295}$$

wo B das Vergrößerungsverhältnis in den Pupillen bedeutet.

Aus (295) folgt durch Differentiation, da B als Konstante aufzufassen ist:

$$\frac{d(\operatorname{tg} w^2)}{d(\operatorname{tg} w'^2)} = B^2, \tag{296}$$

und Gleichung (294) liefert, wenn wir noch die Beziehung

$$\frac{d\lambda'}{d\lambda} = B^2 \tag{297}$$

beachten,

$$h = \varkappa \frac{d\lambda'}{\xi'^2} \cos w^3 f(w). \tag{298}$$

Nehmen wir das Lambertsche Emanationsgesetz als gültig an, so ist

$$f(w) = \cos w, \tag{299}$$

und Gleichung (298) wird:

$$h = \varkappa \frac{d\lambda'}{\xi'^2} \cos w^4 . \tag{300}$$

Hiernach ist also die Helligkeit auf der Mattscheibe

1. proportional der Fläche der (AP) und der vierten Potenz des Kosinusses der objektseitigen Strahlenneigung,
2. umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung der (AP) von der Mattscheibe.

Für die Mitte der Mattscheibe ist $w = 0$, und Gleichung (300) liefert

$$h_0 = \varkappa \frac{d\lambda'}{\xi'^2} . \tag{301}$$

Wir wollen jetzt unsere Gleichungen noch auf den praktisch wichtigsten Fall umformen, daß sich das Objekt in großer Entfernung befindet. Wie ein Blick auf die Figur 21 S. 46 lehrt, geht ξ' in diesem Falle in die dort mit x_0' bezeichnete Größe über, die nach Gleichung (53a) S. 47 gleich fB ist, wenn wir noch die vordere und hintere Brennweite des Systemes einander gleichsetzen. Gleichung (300) liefert jetzt

$$h_\infty = \varkappa \frac{d\lambda'}{f^2\, B^2} \cos w^4 ,$$

oder unter Berücksichtigung von Gleichung (297)

$$h_\infty = \varkappa \frac{d\lambda}{f^2} \cos w^4 . \tag{302}$$

Die Helligkeit, welche ferne Objekte auf der Mattscheibe erzeugen, ist also

1. proportional der Fläche der Eintrittspupille und der vierten Potenz der Kosinusse der objektseitigen Strahlenneigungen,
2. umgekehrt proportional dem Quadrate der Brennweite.

Unter Öffnungsverhältnis M eines Objektives versteht man gewöhnlich den Quotienten aus Durchmesser 2ϱ der (EP) und Brennweite. Da nun $d\lambda$ dem Quadrate von 2ϱ proportional ist, so lehrt Gleichung (302), daß die Helligkeit h_∞ der Größe M^2 proportional ist.

Die Einteilung der photographischen Objektive kann von verschiedenen Gesichtspunkten aus erfolgen. Insbesondere gelangt man zu ganz verschiedenen Gruppierungen, je nachdem man den Gebrauchszweck oder den Konstruktionstypus als Einteilungsprinzip wählt. Der Gebrauchszweck wird wesentlich durch die Lichtstärke bedingt.

Die obigen Ausführungen geben jedoch nur ein Maß für die sogenannte relative Lichtstärke, indem die Verluste durch Absorption und Reflexion, im letzteren Falle insbesondere an den an Luft grenzenden Flächen, dort unberücksichtigt geblieben sind. Erst unter Beachtung dieser letzteren Umstände würde man zur Feststellung der absoluten Lichtstärke gelangen. Bemerkt sei zunächst, daß Kittflächen wegen der verhältnismäßig geringen Differenz der Brechungsexponenten der aneinander grenzenden Gläser praktisch für den Reflexionsverlust bedeutungslos sind. Für Linsen, die beiderseitig von Luft umgeben sind, sind diese Verluste jedoch nicht unbedeutend. Nach Czapski, Grundzüge der Theorie der optischen Instrumente, 2. Auflage, Leipzig 1904, S. 303 betragen diese Verluste bei einer Einzellinse etwa 8 %, bei einem Doublet 15 %, bei einem Triplet 22 % und bei einem aus vier Einzellinsen bestehenden Objektiv etwa 28 %. Diese Zahlen gelten annähernd für den Brechungsexponenten 1,5 und würden sich für größere Brechungsexponenten noch etwas erhöhen.

Das von einer reflektierenden Fläche zurückgeworfene Licht erleidet im allgemeinen eine zweite Reflexion und wird dann auf die lichtempfindliche Platte geworfen.

Hierdurch können sogenannte Lichtflecke entstehen, die ein sonst gut korrigiertes Objektiv praktisch unbrauchbar machen können. Es muß die Sorge des konstruierenden Optikers sein, die reflektierenden Flächen des Systemes so anzuordnen, daß dieses schädliche Licht möglichst zerstreut auf die Mattscheibe gelangt, d. h. daß die betreffenden Nebenbilder möglichst weit von der Mattscheibe entfernt und womöglich auch noch unter starker Vergrößerung zustande kommen. Ziehen wir nur die Nebenbilder in Betracht, welche durch zwei Reflexionen herbeigeführt werden, so ist ihre Anzahl A unter Voraussetzung von m reflektierenden Flächen

$$A = \frac{2m(2m-1)}{2}\,.$$

Kapitel 11.

Die symmetrischen Objektive.

§ 99. Die Komafreiheit symmetrischer Objektive.

Besonders wichtig ist das Verhalten symmetrischer Objektive in bezug auf die Koma. Denken wir uns durch den Mittelpunkt S eines symmetrischen Objektives, wie es etwa Figur 58 zeigt, unter beliebiger Neigung zur Achse eine Gerade gelegt, die wir so weit nach rechts und links verlängern, bis sie die nächsten Flächen in den

Fig. 58.

Punkten A_1 und A trifft, denken wir uns ferner, diese Gerade werde von den beiden kongruenten Teilsystemen (Fig. 58) nach dem Brechungsgesetze gebrochen, so daß also der Weg $CBASA_1B_1C_1$ entsteht. Dieser Weg kann aufgefaßt werden als die Achse eines unendlich dünnen meridionalen Bündels, dessen Objektpunkt irgendwo auf der Geraden CB, dessen Bildpunkt auf C_1B_1 liegt. Wir wollen den Objektpunkt jetzt in P, den Bildpunkt in P' annehmen und die Bedingung aufstellen:

$$PB = P'B_1\,.$$

Dies bedeutet in unserer früheren Bezeichnung unter Voraussetzung eines Systemes von $\varkappa$ Flächen

$$t_1 = -t'_\varkappa .$$

Wegen der Kongruenz der Figurenteile rechts und links von S folgt dann auch, daß

$$t'_1 = -t_\varkappa ,$$

$$t_2 = -t'_{\varkappa-1}$$

und allgemein:

$$t_\lambda = -t'_{\varkappa-\lambda+1}$$

ist.

Man könnte nun auf diese Weise zu dem Schlusse kommen, daß auch $AS = SA_1$ zwei Schnittweiten sein müßten. Dies würde jedoch fordern, daß in S ein reelles Bild entsteht, ein Fall, der für photographische Objektive nicht eintritt oder wenigstens bisher nie realisiert ist. Ein zweiter möglicher Fall ist der, daß die beiden von P ausgehenden unendlich benachbarten Strahlen nach der Brechung durch das eine Teilsystem sich nicht in S schneiden, sondern längs AS parallel verlaufen und als ein paralleles Bündel in A_1 die vordere Fläche des anderen Teilsystemes treffen. Auch in diesem Falle ist der Strahlengang rechts und links von S vollständig übereinstimmend und $PB = P'B_1$. Dieser letztere Fall liegt nun bei symmetrischen photographischen Objektiven immer vor, wenn die Entfernungen der Objektebene und Mattscheibe vom System einander gleich gemacht werden, wie dies z. B. bei Reproduktionsaufnahmen in gleicher Größe eintritt. Wenn auch dieser letztere Fall in der praktischen Photographie nicht gerade von hervorragender Wichtigkeit ist, so weiß man doch aus Erfahrung, daß die guten Eigenschaften, die ein Objektiv in einem derartigen Spezialfalle zeigt, auch für den gewöhnlichen Fall sehr entfernter Objekte zum großen Teile erhalten bleiben.

Wir beweisen jetzt den wichtigen Satz:

Wenn Objektebene und Bildebene bei einem symmetrischen Objektive gleichweit von dem letzteren entfernt liegen, ist die Abbildung frei von Koma.

Wir wollen der Übersichtlichkeit wegen uns auf die Betrachtung von vier Flächen beschränken. Die Ausdehnung des Beweises auf beliebig viele Flächen ist damit unmittelbar gegeben.

Zwischen den Schnittweiten t usw. bestehen zunächst die Beziehungen:

$$(303)\quad \begin{cases} t_1 = -t_4', & r_1 = -r_4, & i_1 = i_4', \\ t_1' = -t_4, & r_2 = -r_3, & i_1' = i_4, \\ t_2 = -t_3', & n_1 = n_4', & i_2 = i_3', \\ t_2' = -t_3, & n_1' = n_4, & i_2' = i_3 \\ & \text{usw.} & \end{cases}$$

Es ist nun [Gleichung (218) S. 126]

$$(304)\qquad Q_1^I = n_1 \cos i_1 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{\cos i_1}{t_1}\right) = n_1' \cos i_1' \left(\frac{1}{r_1} - \frac{\cos i_1'}{t_1'}\right),$$

$$(305)\qquad Q_4^I = n_4 \cos i_4 \left(\frac{1}{r_4} - \frac{\cos i_4}{t_4}\right) = n_4' \cos i_4' \left(\frac{1}{r} - \frac{\cos i_4'}{t_4'}\right).$$

Unter Berücksichtigung der Beziehungen (303) gehen die Ausdrücke für Q_4^I [Gleichung (305)] in die Ausdrücke für Q_1^I [Gleichung (304)] über, so daß man hat:

$$(306)\qquad Q_1^I = -Q_4^I.$$

Ebenso findet man

$$(306\,\text{a})\qquad Q_2^I = -Q_3^I$$

und ganz analog ergeben sich die Beziehungen:

$$(307)\quad \begin{cases} \Delta\left(\frac{1}{n\,t}\right)_1 = -\Delta\left(\frac{1}{n\,t}\right)_4, \\ \Delta\left(\frac{1}{n\,t}\right)_2 = -\Delta\left(\frac{1}{n\,t}\right)_3. \end{cases}$$

Schreibt man sich ferner die Ausdrücke $\frac{ds_\varkappa}{ds_1}$ aus Gleichung (253) S. 143 auf für die Indizes von $\varkappa = 4$ bis $\varkappa = 1$ und berücksichtigt wieder die Relationen (303), so erhält man

$$(308)\qquad \frac{ds_4}{ds_1} = -\frac{ds_1}{ds_1}, \qquad \frac{ds_3}{ds_1} = -\frac{ds_2}{ds_1}.$$

Denkt man sich nun die Gleichung (254) S. 143, durch welche die Bedingung für die Komafreiheit ausgedrückt wird, für die Werte von $\varkappa = 1$ bis $\varkappa = 4$ hingeschrieben und berücksichtigt noch, daß

$$Q_4 = Q_1,$$
$$Q_3 = Q_2$$

ist, so wird diese Gleichung identisch erfüllt, wenn man darin die

Werte aus (306), (306a), (307) und (308) einträgt, indem immer zwei der Summanden entgegengesetzt gleich sind.

Damit ist der oben ausgesprochene Satz bewiesen.

Befindet sich also in P ein leuchtender Punkt (Fig. 58), so ist der durch den Symmetriepunkt S gehende Strahl der Träger der kaustischen Spitze im Bildraume, die also durch Punkt P' dargestellt ist. In diesem Falle ist also der Symmetriepunkt S der Mittelpunkt der natürlichen Blende, die in diesem Falle zwar nicht im Objektraume, sondern im Medium gelegen ist, das zwischen den kongruenten Systemhälften sich befindet. Außerdem ist hier der Punkt S unveränderlich für beliebige endliche Strahlenneigungen.

Da Gleichung (254) in dem vorliegenden Falle identisch erfüllt ist, so ist es nätürlich auch die für achsennahe Strahlen geltende Gleichung (261) S. 151, welche ja aus der Gleichung (254) hergeleitet ist.

Bildet man also den Symmetriepunkt nach links durch das vorgelagerte System ab, so erhält man den Mittelpunkt der natürlichen Blende im Objektraume. Dieser letztere Punkt fällt aber ersichtlich mit dem ersten Gaußschen Hauptpunkte des ganzen Systemes zusammen, so daß wir den Satz aussprechen können:

Bei symmetrischen Objektiven unter Voraussetzung gleicher Objekt- und Bildgröße fällt der Mittelpunkt der natürlichen Blende im Objektraume mit dem Gaußschen ersten Hauptpunkte zusammen. Mit großer Annäherung kann man diesen Punkt auch für entfernte Objekte als Schnittpunkt der Fundamentalstrahlen ansehen.

Nach den gemachten Erörterungen ist es ersichtlich nicht unzweckmäßig, bei symmetrischen Objektiven zur Korrektion und Feststellung der Bildwölbung im Meridionalschnitte von der einen Hälfte auszugehen, indem man durch den Symmetriepunkt unter verschiedenen Neigungen aus dem Unendlichen kommende Meridionalbündel durchrechnet, da, wie oben ausgeführt, in Figur 58 tatsächlich die durch S gehenden unendlich dünnen Bündel parallelstrahlig sind. Die sphärische Korrektion und die Feststellung des Astigmatismus hat jedoch zweckmäßig unter Berücksichtigung des ganzen Systemes zu erfolgen.

Bemerkt sei hier noch, daß man fälschlich auf den Gedanken geführt werden könnte, daß nach der Darstellung der Figur 58 auch eine Hälfte des symmetrischen Objektives für ein unendlich fernes

Objekt komafrei sein müßte. Man hat jedoch zu berücksichtigen, daß zwar zwei von P ausgehende unendlich benachbarte Strahlen in dem die beiden kongruenten Systemteile trennenden Medium parallel zueinander laufen, nicht mehr aber ein dritter von P ausgehender unendlich benachbarter Strahl.

§ 100. Die Petzval-Bedingung und der Astigmatismus bei sogenannten Nullinsen, insbesondere bei symmetrischer Anordnung.

Der allgemeine Ausdruck für die Brennweite F einer in Luft befindlichen Linse mit den Radien r_1 und r_2 und der Dicke d ist gegeben durch:

$$\frac{1}{F} = \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)(n-1) + \frac{(n-1)^2}{n} \frac{d}{r_1 r_2}. \tag{309}$$

Vernachlässigt man hierin die Größe d, so gelangt man zu der bekannten für unendlich dünne Linsen gültigen Formel.

Setzt man in der allgemeinen Formel

$$r_1 = r_2, \tag{310}$$

so erhält man eine besondere Linsenform, die man als „Nullinse" oder „Linse mit Nullkrümmung" bezeichnet.

Aus (309) ergibt sich unter Berücksichtigung von (310)

$$\frac{1}{F} = \frac{(n-1)^2 d}{n r^2}. \tag{311}$$

Die Nullinse hat also den Charakter einer positiven Linse, ihre Brennweite ist der Dicke direkt und dem Quadrate des Radius umgekehrt proportional.

Diese Linsen haben hinsichtlich des Astigmatismus und der Erfüllung der Petzval-Bedingung sehr bemerkenswerte Eigenschaften, worauf wohl zuerst v. Hoegh aufmerksam gemacht hat (Archiv für wissenschaftliche Photographie II, 1900).

Eine Nullinse erfüllt immer die Petzval-Bedingung, d. h. der Krümmungsradius R des Bildes im Meridionalschnitte ist unendlich groß; denn der Wert von R

$$-\frac{1}{R} = \frac{n-1}{n}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

wird unendlich groß für $r_1 = r_2$.

Außerdem sind auch die Bündel, welche von einem fernen Objekte herkommend unter beträchtlicher Neigung zur Achse das System durchdringen, nahezu frei von Astigmatismus und von Bildwölbung.

v. Hoegh wählt als Beispiel die Linse:

$$d = 6{,}09 \quad \begin{matrix} r_1 = -11{,}993\,, \\ r_2 = -11{,}900\,, \end{matrix}$$

welche nahezu eine Nullinse ist, deren Brennweite $f = 100$ beträgt. Wählt man den Kreuzungspunkt der Hauptstrahlen 7,12 vor dem Scheitel der ersten brechenden Fläche, so ergibt die Rechnung, daß bei einer Neigung von 30° der Astigmatismus behoben ist, und der homozentrische Bildpunkt nur eine Entfernung von 0,25 von der hinteren Fokalebene hat.

Faßt man diese Linse als die hintere Hälfte eines symmetrischen Objektives auf, indem man im Abstande von 14,24 eine vordere kongruente Hälfte hinzufügt, so verwandeln sich (streng allerdings nur bei Einstellung auf gleiche Vergrößerung) die Hauptstrahlen in Fundamentalstrahlen, und die Kombination wird auch noch komafrei. Unsere Linsenverbindung kann also gewissermaßen als Urform eines Doppelanastigmaten angesehen werden; sie entbehrt jedoch der sphärischen und chromatischen Korrektion. Zur Hebung auch dieser Fehler gibt v. Hoegh (l. c.) mehrere sehr nützliche Winke.

Kapitel 12.

Geometrische Konstruktionen gebrochener Strahlen und Strahlenbündel.

§ 101. Die Konstruktion des gebrochenen Strahles.

Für photographische Objektive spielen gegen die Achse stark geneigte Strahlen eine große Rolle, insbesondere im Gegensatze zur Theorie der Fernrohrobjektive. Wenn auch in der trigonometrischen Durchrechnung das sicherste, aber dafür auch sehr zeitraubende und in mancher Beziehung schwerfällige Mittel gegeben ist, den Verlauf der Strahlen nach einer gegebenen Anzahl von Brechungen festzustellen, so möchten wir hier doch auf einige geometrische Konstruktionen hinweisen, die mit großer Anschaulichkeit darüber Aufschluß geben, wie der Astigmatismus und unter Umständen auch die sphärische Aberration von einer bestimmten Fläche beeinflußt werden. Für die Beurteilung derartiger Einflüsse im einzelnen ist die geometrisch-konstruktive Methode außerordentlich brauchbar.

1. Konstruktion des gebrochenen Strahles nach Lippich.

In Figur 59 sei um M ein Kreis mit dem Radius $MB = r$ gezeichnet, der den Schnitt der brechenden Fläche mit der Einfallsebene darstellt, so daß also MB das Einfallslot ist. Sind in bekannter Weise n und n' die Brechungsexponenten vor und hinter der brechenden Fläche, und ist AB der von links einfallende Strahl, so trage man von B aus in der Lichtrichtung auf dem einfallenden Strahle die beliebige (etwa gleich der Einheit) gewählte Strecke BD ab und ziehe durch D eine Parallele zum Radius BM. Ein Kreis

Fig. 59.

um B mit dem Radius $BE = BD\,\frac{n'}{n}$ schneidet diese Parallele in E. Dann stellt BE die Richtung des gebrochenen Strahles dar.

Zum Beweise setze man

$$\sphericalangle DBM = i\,,$$
$$\sphericalangle EBM = i'\,.$$

Dann hat man aus dem Dreiecke BED nach dem Sinussatze der Trigonometrie

$$\frac{\sin i}{\sin i'} = \frac{BE}{BD} = \frac{BD\,n'}{BD\,n} = \frac{n'}{n}\,,$$

wodurch das Brechungsgesetz verifiziert ist.

2. Konstruktion von Weierstraß.

In Figur 60 stelle der Kreis um M mit dem Radius $MB = r$ den Schnitt der brechenden Fläche dar, die das rechts befindliche

Fig. 60.

Medium mit dem Brechungsexponenten n' von dem links befindlichen Medium mit dem Brechungsexponenten n abgrenzt.

Um M sind noch zwei weitere Kreise mit den Radien

$$MD = \frac{n\,r}{n'} \quad \text{und} \quad MC = \frac{n'\,r}{n}$$

geschlagen. Verlängert man nun den einfallenden Strahl AB, bis er den Kreis mit dem Radius MC in C schneidet, und zieht den

Radius CM, der den Kreis mit dem Radius MD in D schneidet, so ist BD der gebrochene Strahl.

Der Beweis folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke BCM und BMD, welche in einem Winkel übereinstimmen und in denen die diesen Winkel einschließenden Seiten proportioniert sind (d. h. sich wie n zu n' verhalten).

Setzt man dann $\sphericalangle ABN = i$ und $\sphericalangle DBM = i'$ und beachtet, daß auch $\sphericalangle BCM = i'$ ist, so ergibt die Anwendung des Sinussatzes der Trigonometrie auf das Dreieck BCM: $\frac{\sin i}{\sin i'} = \frac{n'}{n}$, wodurch das Brechungsgesetz verifiziert ist. Außerdem ist ersichtlich:

$$SC : SD = n' : n\,.$$

§ 102. Die aplanatischen Punkte der Kugelfläche.

Mittels der Konstruktion von Weierstraß erhält man Kenntnis von den sogenannten „aplanatischen Punkten" der Kugelfläche. Ein Blick auf die Figur 60 lehrt, daß alle nach C hinzielenden einfallenden Strahlen nach der Brechung durch den Punkt D gehen. Punkt C wird also in D aberrationslos abgebildet. Das Punktpaar C und D erfüllt aber auch die Sinusbedingung. Denn da der Winkel BDM in Figur 60 gleich i ist, so sind, wenn man SMC als optische Achse auffaßt, i' und i die Achsenneigungen des einfallenden und gebrochenen Strahles, und man erhält

$$\frac{\sin i'}{\sin i} = \text{const} \cdot \frac{n}{n'}\,.$$

§ 103. Die komafreien Punkte der Kugelfläche.

Fällt man in Figur 60 von M aus Lote ML und ML' auf den einfallenden und gebrochenen Strahl, so wird L in L' „komafrei" abgebildet, d. h. drei einander unendlich nahe, in Richtung AB einfallende und in L sich schneidende Strahlen gehen nach der Brechung streng durch den Punkt L'.

Zum Beweise denkt man sich die Gleichung (254) S. 143, welche die Bedingung für die Komafreiheit eines beliebigen, ein zentriertes System durchdringenden Bündels liefert, für nur eine brechende Fläche hingeschrieben und erhält:

$$Q\,Q^I \Delta\left(\frac{1}{n\,t}\right) = 0\,.$$

Jeder dieser drei Faktoren muß der Null gleich gesetzt auf komafreie Punkte führen. Der erste Faktor liefert den durch den Kugelmittelpunkt gehenden Strahl, der dritte weist auf die aplanatischen Punkte hin. Der zweite ergibt zufolge Gleichung (218) in § 78

$$0 = n \cos i \left(\frac{1}{r} - \frac{\cos i}{t}\right) = n' \cos i' \left(\frac{1}{r} - \frac{\cos i'}{t'}\right),$$

woraus folgt:

$$t = r \cos i\,, \qquad t' = r \cos i'\,,$$

d. h. die Schnittweiten der „komafreien Punkte" sind gleich den Projektionen des Radius auf den einfallenden resp. gebrochenen Strahl, wodurch unsere Konstruktion als zutreffend erwiesen ist.

§ 104. Die Konstruktion der astigmatischen Bildpunkte.

Wir fassen jetzt einen einfallenden Strahl als die Achse eines unendlich dünnen Bündels auf. Der gebrochene Strahl stellt alsdann die Achse des gebrochenen Bündels dar. Um die astigmatischen Bildpunkte zu konstruieren, sei die Papierebene der Hauptschnitt.

Ist in Figur 61 M der Mittelpunkt der brechenden Kugelfläche und $A_1 A B$ der einfallende Strahl (die Bündelachse), der in Richtung BC gebrochen wird, und seien noch A_1 der sagittale und A der meridionale Objektpunkt des einfallenden Bündels, so findet man zunächst den sagittalen Bildpunkt, indem man von A_1 eine Gerade durch M legt, die den gebrochenen Strahl in dem gesuchten Punkte T_1 schneidet. (Zum Beweise vgl. die Betrachtungen des § 83 und die Fig. 43.)

Fig. 61.

Der Punkt M kann als Mittelpunkt des sagittalen Bündels bezeichnet werden, insofern als bei einer beliebigen Verschiebung des Punktes A_1 längs der Geraden $A_1 B$ die von A_1 aus durch M gezogene Gerade immer die gebrochene Bündelachse in dem sagittalen Bildpunkte schneidet.

Der Mittelpunkt K des Meridionalbündels wird durch folgende Konstruktion ermittelt:

Man fällt von M aus die Lote MD und ME (Fig. 61) auf die Richtung des einfallenden und gebrochenen Strahles, dann ist der Fußpunkt K eines von M aus auf die verlängerte Gerade DE gefällten Lotes der Mittelpunkt für das meridionale Bündel, d. h. die von dem meridionalen Objektpunkte A aus durch K gezogene Gerade schneidet die gebrochene Bündelachse BC in dem meridionalen Bildpunkte I. (Über den Beweis vgl. Gleichen: Die Haupterscheinungen der Brechung und Reflexion des Lichtes. Leipzig 1889.)

Kapitel 13.

Historische Notizen und Konstruktionsdaten einiger Objektive.

§ 105. Notizen zur Geschichte der photographischen Objektive.

In dem Werke von v. Rohr: Theorie und Geschichte des photographischen Objektives haben wir eine sehr ausführliche Darstellung der historischen Entwicklung der photographischen Optik. Wir beschränken uns hier auf wenige Notizen.

1812. Wollaston führte an Stelle der vorher allgemein für die Camera obscura üblichen plankonvexen Linse die Meniskenform ein mit der hohlen Fläche nach außen, wodurch unter Benutzung einer Vorderblende die Randteile des Bildes verbessert wurden.

Um 1830 führten V. Ch. Chevalier die aus Flint- und Crownglas verkittete Landschaftslinse ein (plankonvex mit der Planfläche nach außen).

1840 berechnete J. Petzval sein berühmtes Porträtobjektiv, bestehend aus drei getrennten Systemen, von denen das erste ein verkitteter Meniskus, die beiden anderen einfache Linsen waren. Besonders ausgezeichnet ist an diesem Objektive die Lichtstärke und die sphärische Korrektion in der Mitte des Feldes, Eigenschaften, die diesem Systeme heute noch als Porträtobjektiv eine sehr hohe Wertschätzung sichern. Besonders in der technisch hervorragenden Ausführung durch die Werkstätte von Voigtländer fand dieses Objektiv die weiteste Verbreitung.

In der Zeit von 1850—1860 erschienen eine Reihe von Objektiven im Handel, die den verschiedenen Typen angehörend, den Markt meist jedoch dauernd nicht behaupten konnten, insbesondere durch den Aplanaten verdrängt wurden. Hierher gehören die „globe lens“ von Harrison und Schnitzer — wohl das erste symmetrische aus zwei verkitteten Menisken bestehende Objektiv, das Dallmeyersche, aus

drei getrennten Systemen bestehende Porträtobjektiv, das sich bis in die neueste Zeit einer gewissen Beliebtheit erfreut.

1865 konstruierte A. Steinheil sein aus zwei einfachen Menisken bestehendes symmetrisches Periskop und im Jahre 1866 den „Aplanat", der als Universalobjektiv bald große Verbreitung fand. Der Aplanat ist eine Weiterbildung des Periskopes in dem Sinne, daß jeder der beiden — einander kongruenten — Bestandteile aus einem Flintglas- und einem Crownglasmeniskus verkittet war.

Anfang der 80er Jahre konstruierte A. Steinheil den sogenannten Antiplanaten, ein unsymmetrisches Objektiv, in dessen beiden Bestandteilen absichtlich starke Beträge von Abweichungen, jedoch von entgegengesetztem Vorzeichen angehäuft waren.

Nachdem schon Schröder 1887 (concentric lens) und A. Miethe 1888 (Anastigmat) durch Verwendung hochbrechender Crowngläser ein anastigmatisch geebnetes Bildfeld zu schaffen suchten, gelang es P. Rudolph in Jena 1890 und 1891 wirklich, dieses Ziel zu erreichen. Das Konstruktionsprinzip der Rudolphschen Anastigmate bestand darin, einen sogenannten Altachromaten (Flint höher brechend als Crown) mit einem sogenannten Neuachromaten (Crown höher brechend als Flint) zu einem unsymmetrischen Objektiv zusammenzusetzen.

1892 konstruierte v. Hoegh (Firma C. P. Goerz) den bekannten Doppelanastigmaten, das erste symmetrische Objektiv mit anastigmatisch geebnetem Bildfelde. Ihm folgten die Firmen Steinheil und Voigtländer und Sohn ebenfalls mit symmetrischen Objektiven, jedoch von anderem Konstruktionstypus.

1893 bis 1895 konstruierte H. Dennis Taylor die Cooke lens, die, wenigstens in ihrer gewöhnlichen Ausführungsform, aus drei Einzellinsen bestand und einen bemerkenswerten Korrektionszustand zeigte.

In den letzten zehn Jahren ist eine außerordentlich große Anzahl von Objektiven mit anastigmatischer Bildebenung entstanden, so daß jede bedeutendere optische Werkstätte derartige Systeme herstellt. Die Konstruktionstypen sind dabei sehr verschieden, wenn schon die symmetrischen Formen im allgemeinen bevorzugt werden. Wir müssen uns hier auf einige diesbezügliche Notizen beschränken, ohne auch nur annähernd einen Anspruch auf Vollständigkeit machen zu können.

Nachdem schon A. G. Clark im Jahre 1889 durch symmetrische Gegenüberstellung zweier Systeme nach Art des Gaußschen Fernrohrobjektives (vgl. § 51) den jetzt allgemein sogenannten „Gaußtypus" in die photographische Optik eingeführt hatte, ohne jedoch

damals durchschlagenden Erfolg erzielen zu können, konstruierte P. Rudolph im Jahre 1896 das Planar, das von dem reinen Gaußtypus dadurch abweicht, das die beiden mittleren Negativlinsen je aus zwei Bestandteilen zusammengesetzt sind, die nahezu gleiche Brechung, aber verschiedene Dispersion haben (hyperchromatische Zerstreuungslinse).

R. Martin kehrte wieder zu der Urform des Gaußobjektives zurück (Buschanastigmat 1902) und zeigte, daß man auch ohne Verwendung der sogenannten Neuachromate anastigmatische Bildebenung erzielen könne.

Auf anderem Wege war inzwischen schon eine sehr vollkommene Bildebenung erzielt durch den Doppelanastigmat von Goerz (Typus B), der ebenfalls aus vier Einzellinsen besteht, bei dem jedoch hochbrechendes Crown neben schwächer brechendem Flint Verwendung findet. Nicht ganz symmetrisch ist der ebenfalls aus vier Einzellinsen bestehende Aristostigmat von H. Meyer & Comp.

Erwähnt seien hier ferner noch das Lumar von J. Rodenstock und das Euryplan von Gebr. Schulze in Potsdam (E. Arbeit), sowie das aus vier nahezu gleichen gleich stark brechenden Einzellinsen bestehende Objektiv von C. A. Steinheil Söhne (D. R. P. 133957).

Die unsymmetrischen Objektive haben im Unar und Tessar von P. Rudolph in der neueren Zeit eine hohe Vollkommenheit erreicht, während die Tripletform im Heliar von H. Harting (Voigtländer & Sohn) mit größtem Erfolge entwickelt ist.

Schließlich erwähnen wir hier noch den Hypergonweitwinkel (v. Hoegh), der aus zwei einfachen symmetrisch angeordneten Menisken besteht und eine außerordentlich weitgehende Ebenung des Feldes zeigt. Auf sphärische Korrektion mußte bei dem gewählten Typus natürlich von vornherein verzichtet werden.

§ 106. Einige Konstruktionsdaten von Objektiven.

Wir geben hier einige Konstruktionsdaten von photographischen Objektiven, ohne auch nur annähernd den Anspruch auf Vollständigkeit machen zu wollen, und verweisen im übrigen betreffs des hier in Frage kommenden reichen Materiales auf das Werk von v. Rohr: Theorie und Geschichte des photographischen Objektives. Berlin 1899.

In folgendem bedeutet Δ den Luftabstand.

Meniskus von Wollaston
(Philosoph. Trans. 1812 II 370)

$$f_D = 560\,.$$

$$\text{Vorderblende}\left\{\begin{array}{l}\text{Abstand } 70\\ \text{Öffnung } 51\end{array}\right. \text{Öffnungsverhältnis } \frac{f}{12},$$

$$d_1 = 0 \quad \left.\begin{array}{l} r_1 = -286{,}72 \\ r_2 = -143{,}36 \end{array}\right\} \text{Crown } n_D = 1{,}505\,.$$

Periskop von Steinheil $\left(\frac{f}{12} \text{ bis } \frac{f}{15}\right)$

$$f = 1\,.$$

$$\begin{array}{ll} d_1 = 0{,}031 & \left.\begin{array}{l} r_1 = 0{,}203 \\ r_2 = 0{,}243 \end{array}\right\} \text{Crown } n_D = 1{,}51072\,. \\ \Delta_2 = 0{,}071 & \end{array}$$

und symmetrisch.

Universalaplanat von Steinheil $\left(\frac{f}{6} \text{ bis } \frac{f}{7}\right)$

$$f = 1\,.$$

$$\begin{array}{lll} d_1 = 0{,}008 & r_1 = 0{,}246 & \text{Flint } n_D = 1{,}61507\,, \\ & r_2 = 0{,}098 & \\ d_2 = 0{,}017 & r_3 = 0{,}344 & \text{Crown } n_D = 1{,}58761\,. \\ \Delta_3 = 0{,}17 & & \end{array}$$

und symmetrisch.

Gruppenantiplanet $\left(\frac{f}{6{,}5}\right)$

$$f = 1\,.$$

$$\begin{array}{lll} d_1 = 0{,}020 & r_1 = 0{,}266 & \text{Flint } n_D = 1{,}57709\,, \\ & r_2 = -1{,}191 & \\ d_2 = 0{,}017 & r_3 = 0{,}407 & \text{Crown } n_D = 1{,}51705\,, \\ \Delta_3 = 0{,}017 & & \\ d_4 = 0{,}013 & r_4 = -0{,}407 & \text{Flint } n_D = 1{,}57709\,, \\ & r_5 = 0{,}143 & \\ d_5 = 0{,}102 & r_6 = -0{,}299 & \text{Crown } n_D = 1{,}51705\,. \end{array}$$

Das Porträtobjektiv von Petzval $\left(\frac{f}{3{,}6}\right)$

$f = 145$.

d_1 möglichst klein	$r_1 = 79{,}02$	Crown $n_D = 1{,}517$,
	$r_2 = -62{,}42$	
d_2 möglichst klein	$r_3 = 750{,}7$	Flint $n_D = 1{,}575$,
$\Delta_3 = 65$		
d_4 möglichst klein	$r_4 = 158{,}04$	Flint $n_D = 1{,}575$,
	$r_5 = 55{,}3$	
Δ_5 möglichst klein		
d_6 möglichst klein	$r_6 = 68{,}55$	Crown $n_D = 1{,}517$.
	$r_7 = -223{,}89$	

Anastigmatdoublet von P. Rudolph $\left(\frac{f}{7{,}8}\right)$

$d_1 = 4{,}5$	$r_1 = 18$	Flint $n_D = 1{,}6064$,
	$r_2 = 8{,}4$	
$d_2 = 3{,}2$	$r_3 = 20{,}1$	Crown $n_D = 1{,}5175$,
$\Delta_3 = 4{,}92$		
$d_4 = 1{,}4$	$r_4 = -23{,}0$	Crown $n_D = 1{,}6092$,
	$r_5 = -15{,}2$	
$d_5 = 1{,}0$	$r_6 = 21{,}9$	Flint $n_D = 1{,}5134$,
$d_6 = 2{,}5$	$r_7 = -25{,}6$	Crown $n_D = 1{,}6092$.

Planar von P. Rudolph $\left(\frac{f}{3{,}3}\right)$

$d_1 = 5{,}0$	$r_1 = 32$	L_1 Crown $n_D = 1{,}56785$,
	$r_2 = 144{,}1$	
$\Delta_2 = 0{,}27$		
$d_3 = 5{,}3$	$r_3 = 37{,}6$	L_2 Crown $n_D = 1{,}56768$,
	$r_4 = -45{,}5$	
$d_4 = 2{,}7$	$r_5 = 20{,}5$	L_3 Flint $n_D = 1{,}57087$,
$\Delta_5 = 11{,}8$	$r_6 = -20{,}5$	

und nahezu symmetrisch.

Das aus den verkitteten Linsen L_2 und L_3 bestehende System wird als „hyperchromatische Zerstreuungslinse“ bezeichnet. Die beiden Bestandteile derselben haben nahezu gleiche Brechungsexponenten, aber verschiedenes Zerstreuungsvermögen.

Triple Anastigmat von H. D. Taylor $\left(\frac{f}{6{,}8} \text{ bis } \frac{f}{7{,}7}\right)$

$$d_1 = 2{,}59 \quad \left.\begin{array}{l} r_1 = 14{,}6 \\ r_2 = -101{,}3 \end{array}\right\} \text{ Crown } n_D = 1{,}61140\,,$$

$$\Delta_2 = 0{,}38$$

$$d_3 = 0{,}46 \quad \left.\begin{array}{l} r_3 = -55{,}9 \\ r_4 = 13{,}3 \end{array}\right\} \text{ Flint } n_D = 1{,}54820\,,$$

$$\Delta_4 = 8{,}95$$

$$d_5 = 1{,}83 \quad \left.\begin{array}{l} r_5 = 1012{,}0 \\ r_6 = -69{,}8 \end{array}\right\} \text{ Crown } n_D = 1{,}61140\,.$$

Der Tripleanastigmat erfüllt zwar nicht die Petzval-Bedingung, wohl aber die Annäherung an diese, welche entsteht, wenn man von der Verschiedenheit der Brechungsexponenten absieht.

Setzt man nämlich:

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \varepsilon_1 \qquad \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4} = \varepsilon_2 \qquad r_4 - r_5 = \varepsilon_3\,,$$

so würde die Petzval-Bedingung erfordern:

$$\frac{n_1 - 1}{n_1}\,\varepsilon_1 + \frac{n_2 - 1}{n_2}\,\varepsilon_2 + \frac{n_3 - 1}{n_3}\,\varepsilon_3 = -\frac{1}{R} = 0\,,$$

wenn n_1, n_2, n_3 die Brechungsexponenten der drei Linsen des Taylorschen Systemes sind und R den Krümmungsradius des Bildes im Meridionalschnitte bedeutet.

Macht man, wie Taylor,

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0\,,$$

so bleibt ein Krümmungsrest

$$\frac{1}{R} = \frac{\varepsilon_1}{n_1} + \frac{\varepsilon_2}{n_2} + \frac{\varepsilon_3}{n_3}$$

bestehen, der bei geschickter Wahl der Radien nicht sehr groß ist.

Dreilinsen-Doppelsystem von E. Arbeit $\left(\frac{f}{7,5}\right)$

$$f = 247.$$

$$\begin{array}{lll} d_1 = 7,2 & r_1 = 52,8 & \\ & r_2 = -232,2 & L_1\ n_D = 1,6147\ n_G = 1,6290, \\ d_2 = 2,8 & r_3 = 35,5 & L_2\ n_D = 1,5561\ n_G = 1,5710, \\ \Delta_3 = 1,3 & & \\ d_4 = 4,8 & r_4 = 39,8 & \\ & r_5 = 58,3 & L_3 = L_1 \\ \Delta_5 = 15,2 & & \end{array}$$

und symmetrisch.

(Angaben nach D. R. P. Nr. 135742.)

Gaußobjektiv von Emil Busch (Martin)

$$f = 210.$$

$$\begin{array}{lll} d_1 = 6,15 & r_1 = -\ 22,36 & \\ & r_2 = -\ 42,56 & L_1\ 0.318\ \text{Jena}, \\ \Delta_2 = 3,31 & & \\ d_3 = 5,73 & r_3 = -383,35 & \\ & r_4 = -\ 33,64 & L_2\ 0.802\ \text{Jena}. \end{array}$$

Zwei solcher Systeme lassen sich zu einem symmetrischen Doppelobjektiv (f : 3,9) zusammensetzen.

(Angaben nach der österr. Pat.-Schrift Nr. 8364.)

Symmetrisches Vierlinsensystem von C. P. Goerz (v. Hoegh)

$$f_D = 100.$$

$$\begin{array}{lll} d_1 = 2,0 & r_1 = 24,4 & \\ & r_2 = -53,8 & \text{Schwerstes Barytcrown}\ n_D = 1,5356, \\ \Delta_2 = 0,7 & & \\ d_3 = 0,9 & r_3 = -36,6 & \\ & r_4 = +29,6 & \text{Borsilikatflint}\ n_D = 1,6112, \\ \Delta_4 = 5 & & \end{array}$$

und symmetrisch.

Triplet von Voigtländer & Sohn (H. Harting) $\left(\frac{f}{6}\right)$

$f_D = 100\,.$

	$r_1 = 25{,}84$		
$d_1 = 4{,}17$		L_1 Schwerstes Barytcrown	$n_D = 1{,}61330\,,$
	$r_2 = -\ 66{,}67$		
$d_2 = 0{,}42$		L_2 Baryt-Leichtflint	$n_D = 1{,}56980\,,$
	$r_3 = -166{,}65$		
$\Delta_3 = 2{,}17$			
	$r_4 = -\ 41{,}71$		
$d_4 = 0{,}42$		L_3 Schweres Silikatflint	$n_D = 1{,}60611\,,$
	$r_5 = -\ 25{,}92$		
$\Delta_5 = 5{,}25$			
	$r_6 = -\ 65{,}26$		
$d_6 = 0{,}42$		L_4 Silikatglas	$n_D = 1{,}53780\,,$
	$r_7 = 27{,}16$		
$d_7 = 3{,}33$		L_5 Schwerstes Barytcrown	$n_D = 1{,}61330\,.$
	$r_8 = -\ 27{,}06$		

Kapitel 14.

Die Technik der Durchrechnung.

§ 107. Vorbemerkungen.

Um sich über den Verlauf von Strahlen zu orientieren, die ein System S_1 durchdringen, bedient man sich der trigonometrischen Triangulation. Wieviel Strahlen berücksichtigt werden, hängt von dem Ermessen des Konstrukteurs ab, doch ist aus praktischen Rücksichten wegen des Zeit- und Arbeitsaufwandes dabei bald eine Grenze gesetzt.

Zeigt der Strahlenverlauf einen unbefriedigenden Gang, so müssen (kleine) Änderungen an den Radien und eventl. auch Dicken der Linsen vorgenommen werden, wodurch ein neues System S_2 entsteht. Es empfiehlt sich nun, dem Systeme S_2 die Brennweite des Systemes S_1 zu geben, was folgendermaßen geschieht.

Hat das System S_1 die Brennweite f_1, und findet man durch Rechnung, daß das geänderte System S_2 die Brennweite f_2 hat, so multipliziert man alle Radien und Dicken des Systemes S_2 mit dem Quotienten $\frac{f_1}{f_2}$.

Das so gewonnene System S_2' hat nun wieder die Brennweite f_1 und muß einer neuen Triangulation unterzogen werden. Erscheint jetzt der Strahlenverlauf in einem gewünschten Sinne günstiger, so hat man neue Änderungen vorzunehmen und in derselben Weise weiter zu verfahren. Die Reduktion auf die frühere Brennweite kann nur dann unterbleiben, wenn man von vornherein weiß, daß die vorgenommenen Änderungen die Brennweite relativ wenig, den Korrektionszustand jedoch stark beeinflussen.

Bei einem gegebenen Glasmateriale, wie es durch die Produktionsverzeichnisse unserer Glasschmelzereien geboten wird, und bei einer innerhalb ziemlich enger Grenzen vorgeschriebenen Anzahl von Linsen kann man natürlich nicht alle Fehler der Bilderzeugung heben. Man ist hier vielmehr auf einen Kompromiß angewiesen, und das erstrebte

der $\varkappa^{\text{ten}}$ Fläche bezeichnet, wenn man, wie immer in diesem Buche, die Richtung des Lichtes von links nach rechts annimmt.

In den jetzt anzugebenden und eventl. neu zu entwickelnden Formeln unterdrücken wir den Index $\varkappa$, beschränken uns also auf die Brechung an der ersten Fläche. Für jede folgende Fläche ist also der betreffende Index um eine Einheit zu erhöhen.

Die Gleichungen (201) in § 76 liefern in der neuen Schreibweise:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{n_1}{p'} - \frac{n_0}{p_0} &= \frac{n_1 - n_0}{r_0}, \\ p_1 &= p' - d_1 . \end{aligned}\right. \tag{313}$$

Aus (313) folgen leicht die Gleichungen:

$$\frac{1}{p'} = \frac{1}{p_0}\frac{n_0}{n_1} + \frac{1}{r_0}(n_1 - n_0)\frac{1}{n_1}, \tag{314}$$

$$\frac{1}{p_1} = \frac{1}{p'}\frac{1}{1 - \frac{d_1}{p'}}, \tag{315}$$

mittels derer die Durchrechnung von Fläche zu Fläche vorzunehmen ist.

Gleichung (201a) in § 76 liefert ferner, da das erste und letzte Medium hier immer gleiche Brechungsexponenten haben, wenn wir uns etwa auf vier Flächen beschränken

$$f = \frac{p' p'' p''' p^4}{p_1 p_2 p_3}$$

oder unter sinngemäßer Anwendung der zweiten Gleichung unter (313):

$$\frac{1}{f} = \left(1 - \frac{d_1}{p'}\right)\left(1 - \frac{d_2}{p''}\right)\left(1 - \frac{d_3}{p'''}\right)\frac{1}{p^4}. \tag{316}$$

Als Anwendung der Gleichungen (314), (315), (316) geben wir die Durchrechnung der hinteren Hälfte des Doppelanastigmaten von C. P. Goerz. Bemerkt sei noch, daß hier, wie überhaupt immer bei den numerischen Beispielen dieses Kapitels, das Plus- und Minuszeichen hinter den Logarithmen die Vorzeichen der zugehörenden Numeri bedeuten, und daß in den in § 109 bis 112 gegebenen Zahlenbeispielen jede Vertikalreihe der Zahlen einer Fläche zugehört und zwar die erste Reihe der ersten Fläche, die zweite der zweiten usw.

§ 109. Zahlenbeispiel zur Berechnung der fokalen Schnittweite und der Brennweite im paraxialen Gebiete.

Die Konstanten des Doppelanastigmaten (hintere Hälfte) sind:

$$r_0 = -\,0{,}128965 \qquad d_1 = 0{,}01277\,,$$
$$r_1 = -\,0{,}049597 \qquad d_2 = 0{,}00664\,,$$
$$r_2 = +\,0{,}196423 \qquad d_3 = 0{,}02114\,,$$
$$r_3 = -\,0{,}126663$$

$$\left.\begin{aligned} n_1 &= 1{,}5117 \\ n_2 &= 1{,}5478 \\ n_3 &= 1{,}6125 \end{aligned}\right\}\ D\text{-Linie}, \qquad \left.\begin{aligned} n_1 &= 1{,}52266 \\ n_2 &= 1{,}56101 \\ n_3 &= 1{,}62635 \end{aligned}\right\}\ G'\text{-Linie.}$$

Um die bildseitige Schnittweite zu bestimmen, setzen wir

$$p_0 = \infty$$

und berechnen nach den Gleichungen (314) und (315) durch sukzessive Anwendung der Reihe nach die Werte von p', p'', p''', p^4 für die D-Linie:

$$\frac{1}{p'} = \frac{1}{p_0}\,\frac{n_0}{n_1} + \frac{1}{r_0}(n_1 - n_0)\,\frac{1}{n_1}\,. \quad \text{[Gleichung (314) S. 194.]}$$

$\lg \frac{1}{p_0}$		0,404760 −	0,461483 −	0,387518 −
$\lg \frac{n_0}{n_1}$		9,989751 +	9,992215 +	0,207500 +
$\lg\left(\frac{n_0}{n_1}\cdot\frac{1}{p_0}\right)$		0,394511 −	0,443698 −	0,595018 −
$\lg \frac{1}{r_0}$	0,889528 −	1,304545 −	0,706807 +	0,897351 −
$\lg(n_1 - n_0)$	9,709015 +	8,557507 +	8,810904 +	9,787106 −
$\lg \frac{1}{n_1}$	9,820534 +	9,810285 +	9,792500 +	0
$\lg\left(\frac{1}{r_0}\cdot\frac{n_1 - n_0}{n_1}\right)$	0,419077 −	9,672337 −	9,310211 +	0,684457 +
$\frac{n_0}{n_1}\cdot\frac{1}{p_0}$	0	− 2,480339	− 2,777781	− 3,935664
$\frac{1}{r_0}\cdot\frac{n_1 - n_0}{n_1}$	− 2,624682	− 0,470259	+ 0,204273	+ 4,835678
$\frac{1}{p'}$	− 2,624682	− 2,950598	− 2,573508	+ 0,900014

$$\frac{1}{p_1} = \frac{1}{p'} \frac{1}{1 - \frac{d_1}{p'}} . \quad \text{[Gleichung (315) S. 194.]}$$

$\lg \frac{1}{p'}$	0,419077 —	0,469910 —	0,410525 —	9,954249 +
$\lg d_1$	8,106191 +	7,822168 +	8,325105 +	$\lg \frac{1}{p^4}$ 9,954249 +
$\lg \frac{d_1}{p'}$	8,525268 —	8,292078 —	8,735630 —	$\lg p^4$ 0,045751 +
$1 - \frac{d_1}{p'}$	+ 1,033517	+ 1,019592	+ 1,054404	$p^4 = 1,111095$

$\lg \frac{1}{p'}$	0,419077 —	0,469910 —	0,410525 —
$\lg\left(1 - \frac{d_1}{p'}\right)$	0,014317 +	0,008427 +	0,023007 +
$\lg \frac{1}{p_1}$	0,404760 —	0,461483 —	0,387518 —

Hätten wir die analogen Rechnungen für die G'-Linie durchgeführt, so hätten wir für p^4 den Wert 1,109715 gefunden, so daß also eine Fokusdifferenz $= 1,111095 - 1,109715 = 0,001380$ besteht, die praktisch zu vernachlässigen ist.

Berechnung der Brennweite.

Die Anwendung der Gleichung (316) S. 194 ergibt für die D-Linie unter Berücksichtigung von:

$$\log\left(1 - \frac{d_1}{p'}\right) = 0,014317 +$$

$$\log\left(1 - \frac{d_2}{p''}\right) = 0,008427 +$$

$$\log\left(1 - \frac{d_3}{p'''}\right) = 0,023007 +$$

$$\log \frac{1}{p^4} = 9,954249 +$$

$$\log \frac{1}{f} = 0 \qquad f = 1 .$$

§ 110. Formeln für einen Strahl endlicher Neigung zur optischen Achse im Hauptschnitte.

In der Figur 62 sei ABC ein in Richtung des Pfeiles auf die um M geschlagene Kugelfläche fallender Strahl, der die Fläche in B, die Achse in C trifft. Das Einfallslot ist NAM, der Scheitel der Fläche S.

Im Punkte B wird der einfallende Strahl gebrochen in Richtung BC'. Dieser gebrochene Strahl möge in B' die zweite (nicht dargestellte) Kugelfläche treffen. Wir fällen noch die Lote BD und $B'D'$ auf die Achse und bezeichnen für die erste Fläche

Fig. 62.

a) Winkel:

Einfallswinkel $= NBA = CBM = \alpha_0$,

Brechungswinkel $= C'BM = \beta_0$,

$\sphericalangle BCS = w_0$,

$\sphericalangle BC'S = w_1$.

b) Strecken.

Die axiale Schnittweite vor der Brechung $SC = q_0$,

" " " nach " " $SC' = q'$,

die Strahlenlänge bis zur Achse vor der Brechung $BC = k_0$,

" " " " " nach " " $BC' = k'$,

die Einfallshöhe für die erste Brechung $BD = h_0$,

" " " " zweite " $B'D' = h_1$,

die Strecke $BC' - B'C' = BB' = \lambda_1$,

dann kann man aus der Figur 62 sofort die Richtigkeit folgender Formeln erkennen:

$$\sin\alpha_0 = \sin w_0 \left(1 - \frac{q_0}{r_0}\right), \tag{317}$$

$$\sin\beta_0 = \frac{n_0}{n_1}\sin\alpha_0, \tag{318}$$

$$w_1 = w_0 - \alpha_0 + \beta_0, \tag{319}$$

(320) $$q' = r_0\left(1 - \frac{\sin\beta_0}{\sin w_1}\right),$$

(321) $$q_1 = q' - d_1,$$

(322) $$h_0 = r_0 \sin(w_0 - \alpha_0),$$

(323) $$k_0 = \frac{h_0}{\sin w_0},$$

(324) $$k' = \frac{h_0}{\sin w_1},$$

(325) $$\lambda_1 = \frac{h_0 - h_1}{\sin w_1}.$$

Die Gleichungen (317) bis (325) können nach zwei verschiedenen Richtungen hin gebraucht werden, nämlich:

1. zur Feststellung der sphärischen Aberration,
2. zur Berechnung der Hauptstrahlen.

§ 111. Feststellung der sphärischen Aberration.

Wir wollen einen Strahl in der Höhe h_0 achsenparallel auf die erste Fläche fallen lassen und seine axiale Schnittweite nach der letzten Brechung berechnen: Wir setzen

$$w_0 = 0, \qquad q_0 = \infty$$

und erhalten aus Gleichung (322)

(326) $$\sin\alpha_0 = -\frac{h_0}{r_0}.$$

Ist auf diese Weise α_0 bestimmt, so wird nach den Formeln (318) bis (321) weiter gerechnet.

§ 112. Zahlenbeispiel für die Feststellung der sphärischen Aberration und der Abweichung von der Sinusbedingung.

In folgendem soll die sphärische Aberration sowie die Abweichung von der Sinusbedingung an einem Zahlenbeispiele erläutert werden, und zwar wollen wir die Größe dieser Abweichungen berechnen für die hintere Hälfte des Doppelanastigmaten unter Voraussetzung von

$$h_0 = \tfrac{1}{31}$$

und unter Verwendung der der D-Linie zugehörigen Brechungsexponenten.

Für die erste und zweite Fläche sind die zu berechnenden Ausdrücke vorangesetzt, so daß ein Zweifel über die Bedeutung der aufgestellten Zahlen nicht bestehen kann.

1. Fläche		2. Fläche		3. Fläche	4. Fläche
$h_0 = \frac{1}{31}$					D-Linie

Für Fläche 1 gilt:

$$\sin\alpha_0 = -\frac{h_0}{r_0} \text{ [Gleichung (326) S. 198];}$$

$$\sin\beta_0 = \frac{n_0}{n_1}\sin\alpha_0 \text{ [Gleichung (318) S. 197].}$$

Für Fläche 2 gilt:

$$\sin\alpha_1 = \sin w_1\left(1-\frac{q_1}{r_1}\right); \quad \sin\beta_1 = \frac{n_1}{n_2}\sin\alpha_1 \text{ [Gleichung (317) und (318) S. 197].}$$

	1. Fläche		2. Fläche	3. Fläche	4. Fläche
$\lg h_0$	8,508638 −	$\lg\left(1-\frac{q_1}{r_1}\right)$	0,834602 −	0,430703 +	0,329348 −
$\lg\frac{1}{r_0}$	0,889528 −	$\lg\sin w_1$	8,936914 −	9,014438 −	8,962895 −
$\lg\sin\alpha_0$	9,398166 +	$\lg\sin\alpha_1$	9,771516 +	9,445141 −	9,292243 +
$\lg\frac{n_0}{n_1}$	9,820534 +	$\lg\frac{n_1}{n_2}$	9,989751 +	9,982215 +	0,207500 +
$\lg\sin\beta_0$	9,218700 +	$\lg\sin\beta_1$	9,761267 +	9,427356 −	9,499743 +

$$w_1 = w_0 - \alpha_0 + \beta_0 \text{ [Gleichung (319) S. 197].}$$

	1. Fläche		2. Fläche	3. Fläche	4. Fläche
w_0	0°	w_1	− 4°57′40″	− 5°56′ 1″9	− 5°16′ 4″1
$-\alpha_0$	−14°29′ 6″8	$-\alpha_1$	−36°13′15″9	+16°10′58″1	−11°18′10″1
$w_0-\alpha_0$	−14°29′ 6″8	$w_1-\alpha_1$	−41°10′55″9	+10°14′56″2	−16°34′14″2
β_0	+ 9°31′26″8	β_1	+35°14′54″	−15°31′ 0″3	+18°25′25″2
w_1	− 4°57′40″0	w_2	− 5°56′ 1″9	− 5°16′ 4″1	+ 1°51′11″0

$$q' = r_0\left(1-\frac{\sin\beta_0}{\sin w_1}\right) \text{ [Gleichung (320) S. 198].}$$

	1. Fläche		2. Fläche	3. Fläche	4. Fläche
$\lg\sin\beta_0$	9,218700 +	$\lg\sin\beta_1$	9,761267 +	9,427356 −	9,499743 +
$\lg\sin w_1$	8,936914 −	$\lg\sin w_2$	9,014438 −	8,962895 −	8,509690 +
$\lg\frac{\sin\beta_0}{\sin w_1}$	0,281786 −	$\lg\frac{\sin\beta_1}{\sin w_2}$	0,746829 −	0,464461 +	0,990053 +
$\frac{\sin\beta_0}{\sin w_1}$	− 1,913313	$\frac{\sin\beta_1}{\sin w_2}$	− 5,5825	+ 2,913807	+ 9,773560
$1-\frac{\sin\beta_0}{\sin w_1}$	+ 2,913313	$1-\frac{\sin\beta_1}{\sin w_2}$	+ 6,5825	− 1,913807	− 8,773560
$\lg\left(1-\frac{\sin\beta_0}{\sin w_1}\right)$	0,464387 +	$\lg\left(1-\frac{\sin\beta_1}{\sin w_2}\right)$	0,818391 +	0,281899 −	0,943176 −
$\lg r_0$	9,110472 −	$\lg r_1$	8,695455 −	9,293193 +	9,102649 −
$\lg q'$	9,574859 −	$\lg q''$	9,513846 −	9,575092 −	0,045825 +

$q_1 = q' - d_1$ [Gleichung (321) S. 198].

q'	$-0{,}3757155$	q''	$-0{,}3264721$	$-0{,}3759173$ $q^4 + 1{,}111285$
$-d_1$	$-0{,}01277$	$-d_2$	$-0{,}00664$	$-0{,}02114$
q_1	$-0{,}3884855$	q_2	$-0{,}3331121$	$-0{,}3970573$

Ausrechnung von $1 - \frac{q_1}{r_1}$, das in die zweite Vertikalspalte übergeht:

$\lg q_1$	$9{,}589375 -$	$\lg q_2$	$9{,}522591 -$	$9{,}598853 -$
$\lg \frac{1}{r_1}$	$1{,}304545 -$	$\lg \frac{1}{r_2}$	$0{,}706807 +$	$0{,}897351 -$
$\lg \frac{q_1}{r_1}$	$0{,}893920 +$	$\lg \frac{q_2}{r_2}$	$0{,}229398 -$	$0{,}496204 +$
$\frac{q_1}{r_1}$	$+7{,}83285$	$\frac{q_2}{r_2}$	$-1{,}695892$	$+3{,}134757$
$1 - \frac{q_1}{r_1}$	$-6{,}83285$	$1 - \frac{q_2}{r_2}$	$+2{,}695892$	$-2{,}134757$

Die letzte Schnittweite $q^4 = 1{,}111285$ unterscheidet sich von der entsprechenden paraxialen Schnittweite $p^4 = 1{,}111095$ nur um 0,000190, so daß die sphärische Aberration für die betrachtete Zone nur

$$p^4 - q^4 = 0{,}000190$$

beträgt. Für $h_0 = \frac{1}{81}$ ist also fast vollständige Korrektion vorhanden Um einen Überblick über die Zwischenfehler zu geben, teilen wir hier noch die Schnittweiten für zwei verschiedene Einfallshöhen mit (D-Linie), sowie die Strahlenneigungen w_4 zur Achse im letzten Medium. Hierdurch sind dann auch die Abweichungen von der Sinusbedingung $\frac{h_0}{\sin w_4} - f$ gegeben (vgl. § 68).

h_0	w_4	q^4
0	0	1,111 095 (p^4)
$\frac{1}{81}\sqrt{0{,}3}$	1° 1′ 5″7	1,105141
$\frac{1}{81}\sqrt{0{,}5}$	1° 19′ 2″0	1,103405
$\frac{1}{81}\sqrt{0{,}7}$	1° 33′ 31″0	1,104021
$\frac{1}{81}$	1° 51′ 11″0	1,111285

§ 113. Formeln für die Berechnung der astigmatischen Bildpunkte.

Wie schon oben bemerkt, gestatten die Formeln (317) bis (325) auch die Berechnung der Hauptstrahlen. Da aber an diese Rechnungen auch immer die für die astigmatischen Bildpunkte angeschlossen werden, so geben wir hier noch die Formeln für die letzteren.

Die Gleichungen A und B in §§ 82 und 83 auf unsere hier verwendete Bezeichnungsweise umgeschrieben, ergeben sofort, da die dort mit d bezeichnete Größen mit unseren hier eingeführten λ zusammenfällt, unter Berücksichtigung von Gleichung (325)

für Sagittalstrahlen:

$$\frac{1}{\sigma'} = \frac{1}{\sigma_0} \cdot \frac{n_0}{n_1} + \frac{\cos\beta_0}{r_0}\left(1 - \frac{n_0 \cos\alpha_0}{n_1 \cos\beta_0}\right), \tag{327}$$

$$\sigma_1 = \sigma' - \frac{h_0 - h_1}{\sin w_1}; \tag{328}$$

für Meridionalstrahlen:

$$\frac{1}{t'} = \frac{n_0 \cos\alpha_0^2}{n_1 \cos\beta_0^2} \cdot \frac{1}{t_0} + \frac{1}{r_0 \cos\beta_0} \cdot \left(1 - \frac{n_0 \cos\alpha_0}{n_1 \cos\beta_0}\right), \tag{329}$$

$$t_1 = t' - \frac{h_0 - h_1}{\sin w_1}. \tag{330}$$

§ 114. Die Lage der astigmatischen Bildpunkte bezogen auf die Fokalebene.

Um aus den gewonnenen Zahlen sofort eine Vorstellung über die Größe der Bildkrümmung zu erhalten, bezieht man die Lage der

Fig. 63.

astigmatischen Bildpunkte nach der letzten Brechung auf die Fokalebene.

In Figur 63 sei S der Scheitel der brechenden Fläche, aus welcher der letzte gebrochene Strahl (Hauptstrahl) AB austritt, in B

die optische Achse schneidend. Die im hinteren Brennpunkte F' errichtete Fokalebene schneide diesen Strahl in C. Seien nun D und D_1 die beiden astigmatischen Bildpunkte, und legt man durch D und D_1 Parallelen zur optischen Achse, welche die Fokalebene in E und E_1 schneiden, so nennt man $ED = \Delta z_\sigma$ und $E_1 D_1 = \Delta z_t$ die astigmatischen Einstellungsdifferenzen, während man $CD = \Delta \sigma$ und $CD_1 = \Delta t$ setzt.

Unter der Voraussetzung etwa, daß vier brechende Flächen vorhanden sind, haben wir:

$$AB = k^4\,,$$
$$AC = K^4\,,$$
$$CB = L^4\,,$$
$$SF' = p^4\,,$$
$$SB = q^4\,,$$
$$\sphericalangle ABS = w_4\,,$$
$$CD = \Delta \sigma^4\,,$$
$$CD_1 = \Delta t^4\,,$$
$$ED = \Delta z_\sigma^4\,,$$
$$E_1 D_1 = \Delta z_t^4\,.$$

Dann hat man:

$$L^4 = \frac{q^4 - p^4}{\cos w_4}\,, \tag{331}$$

$$K^4 = k^4 - L^4\,, \tag{332}$$

$$\Delta \sigma^4 = \sigma^4 - K^4\,, \tag{333}$$

$$\Delta t^4 = t^4 - K^4\,, \tag{334}$$

$$\Delta z_\sigma^4 = \Delta \sigma^4 \cos w_4\,, \tag{335}$$

$$\Delta z_t^4 = \Delta t^4 \cos w_4\,, \tag{336}$$

wodurch die Beziehung zur Fokalebene hergestellt ist.

§ 115. Der astigmatische Zustand einer Plankonvexlinse, festgestellt mittels Fundamentalstrahlen.

Sowohl um ein Beispiel für die entwickelten Formeln zu geben als auch die Bedeutung der natürlichen Blende deutlich erkennen zu lassen, folgen hier zwei Durchrechnungen derselben Plankonvexlinse, die wir schon oben (§ 88) in unsere Betrachtungen gezogen

haben. Wir wissen, daß eine solche Linse von einem sehr entfernten Objekte ein von Astigmatismus vollständig freies Bild liefert. Der Gang der Rechnung ist nun so gewählt, daß einmal die Hauptstrahlen durch den Mittelpunkt der natürlichen Blende im Objektraume, das andere Mal (§ 116) durch den vorderen Hauptpunkt gehend angenommen werden. Unter der Voraussetzung, daß die Brennweite gleich Eins ist, setzen wir:

$$r_0 = \infty\,, \quad n_0 = 1\,, \quad r_1 = -0{,}5179\,, \quad n_1 = 1{,}5179\,, \quad d_1 = 0{,}0860\,.$$

In diesem einfachen Falle berechnen wir den Abstand der natürlichen Blende aus der Formel (280) in § 94 und finden unter Berücksichtigung der hier gewählten Zeichen

$$x_1 = q_0 = \frac{n_0}{n_1}(r_1 + d_1) = -\frac{0{,}4319}{1{,}5179} = -0{,}28454\,.$$

Wegen $r_0 = \infty$ ist in dem vorliegenden besonderen Falle $\alpha_0 = w_0$ und $\beta_0 = w_1$. Die Festellung des Fundamentalstrahles erfolgt am einfachsten durch die Gleichungen:

$$\sin w_1 = \frac{\sin w_0}{w_1} \qquad \text{und} \qquad q' = \operatorname{tg} w_0 \operatorname{ctg} w_1\, q_0\,.$$

Alsdann wird weitergerechnet nach den Formeln: (321), (317), 318), (319), (320), (322), (323), (324), (331) und (332).

	log		log		log
$r_0 = \infty$		$d_1 = 0{,}086$	[8,934498	$n_1 = 1{,}5179$	[0,181243]
$r_1 = -0{,}5179$	[9,714246 —]	$q_0 = -0{,}28454$	9,454143 —]		

Fundamentalstrahl $q_0 = -0{,}28454$.

	$w_0 = -10^0$	$w_0 = -20^0$	$w_0 = -30^0$	$w_0 = -40^0$
$\lg\sin w_0$	9,239670 —	9,534052 —	9,698970 —	9,808067 —
$\lg 1/n_1$	9,818757	9,818757	9,818757	9,818757
$\lg\sin w_1$	9,058427 —	9,352809 —	9,517727 —	9,626824 —
w_1	— 6° 34′ 8,5″	— 13° 1′ 19,1″	— 19°13′57,0″	— 25° 3′ 14,2″
$\lg q_0$	9,454143 —	9,454143 —	9,454143 —	9,454143 —
$\lg\operatorname{tg} w_0$	9,246319 —	9,561066 —	9,761439 —	9,923814 —
$\lg\operatorname{ctg} w_1$	0,938713 —	0,635877 —	0,457332 —	0,330261 —
$\lg q'$	9,639175 —	9,651086 —	9,672914 —	9,708218 —
q'	— 0,435687	— 0,447802	— 0,4708844	— 0,5107613
$-d_1$	— 0,086	— 0,086	— 0,086	— 0,086
q_1	— 0,521687	— 0,533802	— 0,5568844	— 0,5967613

Fundamentalstrahl $q_0 = -0{,}28454$.

	$w_0 = -10°$	$w_0 = -20°$	$w_0 = -30°$	$w_0 = -40°$
$\lg q_1$	9,717410 −	9,727381 −	9,745765 −	9,775801 −
$\lg \frac{1}{r_1}$	0,285754 −	0,285754 −	0,285754 −	0,285754 −
$\lg \frac{q_1}{r_1}$	0,003164 +	0,013135 +	0,031519 +	0,061555 +
$\frac{q_1}{r_1}$	+ 1,007312	+ 1,030707	+ 1,075273	+ 1,152271
$1 - \frac{q_1}{r_1}$	− 0,007312	− 0,030707	− 0,075273	− 0,152271
$\lg\left(1 - \frac{q_1}{r_1}\right)$	7,864036 −	8,487237 −	8,876639 −	9,182617 −
$\lg \sin w_1$	9,058427 −	9,352809 −	9,517727 −	9,626824 −
$\lg \sin \alpha_1$	6,922463 +	7,840046 +	8,394366 +	8,809441 +
$\lg \frac{n_1}{1}$	0,181243	0,181243	0,181243	0,181243
$\lg \sin \beta_1$	7,103706 +	8,021289 +	8,575609 +	8,990684 +
w_1	− 6° 34′ 8,5″	− 13° 1′ 19,1″	− 19°13′57,0″	− 25° 3′ 14,2″
$-\alpha_1$	− 0° 2′ 52,5″	− 0°23′47,2″	− 1°25′14,9″	− 3°41′ 49,7″
$w_1 - \alpha_1$	− 6° 37′ 1,0″	− 13°25′ 6,3″	− 20°39′11,9″	− 28° 45′ 3,9″
$+\beta_1$	+ 0° 4′ 21,9″	+ 0°36′ 6,3″	+ 2° 9′ 24,9″	+ 5° 37′ 1,1″
w_2	− 6° 32′ 39,1″	− 12°49′ 0,0″	− 18°29′47,0″	− 23° 8′ 2,8″
$\lg \sin \beta_1$	7,103706 +	8,021289 +	8,575609 +	8,990684 +
$\lg \sin w_2$	9,056789 −	9,346024 −	9,501395 −	9,594265 −
$\lg \frac{\sin \beta_1}{\sin w_2}$	8,046917 −	8,675265 −	9,074214 −	9,396419 −
$\frac{\sin \beta_1}{\sin w_2}$	− 0,011141	− 0,047344	− 0,118635	− 0,249126
$1 - \frac{\sin \beta_1}{\sin w_2}$	+ 1,011141	+ 1,047344	+ 1,118635	+ 1,249126
$\lg\left(1 - \frac{\sin \beta_1}{\sin w_2}\right)$	0,004812 +	0,020089 +	0,048689 +	0,096606 +
$\lg r_1$	9,714246 −	9,714246 −	9,714246 −	9,714246 −
$\lg q''$	9,719058 −	9,734335 −	9,762935 −	9,810852 −
$q'' =$	− 0,523670	− 0,5424188	− 0,5793414	− 0,6469217
$\lg r_1$	9,714246 −	9,714246 −	9,714246 −	9,714246 −
$\lg \sin(w_1 - \alpha_1)$	9,061569 −	9,365601 −	9,547421 −	9,682150 −
$\lg h_1 =$	8,775815 +	9,079847 +	9,261667 +	9,396396 +
$\lg \sin w_1$	9,058427 −	9,352809 −	9,517727 −	9,626824 −
$\lg k_1 =$	9,717388 −	9,727038 −	9,743940 −	9,769572 −

Fundamentalstrahl $q_0 = -0{,}28454$.

	$w_0 = -10^\circ$	$w_0 = -20^\circ$	$w_0 = -30^\circ$	$w_0 = -40^\circ$
$\lg h_1$	8,775815 +	9,079847 +	9,261667 +	9,396396 +
$\lg \sin w_2$	9,056789 —	9,346024 —	9,501395 —	9,594265 —
$\lg k'' =$	9,719026 —	9,733823 —	9,760272 —	9,802131 —
q''	— 0,523670	— 0,542419	— 0,579341	— 0,646922
$-p''$	— 1,	— 1,	— 1,	— 1,
$q'' - p''$	— 1,523670	— 1,542419	— 1,579341	— 1,646922
$\lg (q'' - p'')$	0,182891 —	0,188202 —	0,198476 —	0,216673 —
$\lg \cos w_2$	9,997161	9,989042	9,976966	9,963593
$\lg L_2$	0,185730 —	0,199160 —	0,221510 —	0,253080 —
k''	— 0,5236313	— 0,5417800	— 0,575800	— 0,6340614
$-L_2$	+ 1,533664	+ 1,581830	+ 1,665367	+ 1,790936
$K'' =$	+ 1,010033	+ 1,040050	+ 1,089567	+ 1,156875

Sagittalstrahl [Gleichung (327), (333), (335)].

	$w_0 = -10^\circ$	$w_0 = -20^\circ$	$w_0 = -30^\circ$	$w_0 = -40^\circ$
$\lg \cos \alpha_1$	0,	9,999990	9,999867	9,999095
$\lg \cos \beta_1$	0,	9,999976	9,999693	9,997910
$\lg \frac{\cos \alpha_1}{\cos \beta_1}$	0,	0,000014	0,000174	0,001185
$\lg \frac{n_1}{1}$	0,181243	0,181243	0,181243	0,181243
$\lg \left(\frac{n_1}{1} \cdot \frac{\cos \alpha_1}{\cos \beta_1} \right)$	0,181243	0,181257	0,181417	0,182428
$\frac{n_1}{1} \cdot \frac{\cos \alpha_1}{\cos \beta_1}$	1,5179	1,517948	1,518507	1,522046
$1 - \frac{n_1}{1} \cdot \frac{\cos \alpha_1}{\cos \beta_1}$	— 0,5179	— 0,517948	— 0,518507	— 0,522046
$\lg \left(1 - \frac{n_1 \cos \alpha_1}{\cos \beta_1} \right)$	9,714246 —	9,714286 —	9,714755 —	9,717709 —
$\lg \cos \beta_1$	0,	9,999976	9,999693	9,997910
$\lg \frac{1}{r_1}$	0,285754 —	0,285754 —	0,285754 —	0,285754 —
$\lg \frac{1}{\sigma''}$	0,000000	0,000016	0,000202	0,001373
$\lg \sigma''$	0,	9,999984	9,999798	9,998627
σ''	1,	0,999967	0,999535	0,996844
$-K''$	— 1,010033	— 1,040050	— 1,089567	— 1,156875
$\Delta \sigma'' =$	— 0,010033	— 0,040087	— 0,090032	— 0,160031
$\lg \Delta \sigma''$	8,001431 —	8,603004 —	8,954397 —	9,204204 —
$\lg \cos w_2$	9,997161	9,989042	9,976966	9,963593
$\lg \Delta z''_\sigma$	7,998592 —	8,592046 —	8,931363 —	9,167797 —
$\Delta z''_\sigma =$	— 0,0099676	— 0,0390883	— 0,0853814	— 0,1471624

Meridionalstrahl [Gleichung (329), (334), (336)].

	$w_0 = -10^0$	$w_0 = -20^0$	$w_0 = -30^0$	$w_0 = -40^0$
$\lg \cos\beta_1$	0,	9,999976	9,999693	9,997910
$\lg r_1$	9,714246 —	9,714246 —	9,714246 —	9,714246 —
$\lg(r_1 \cos\beta_1)$	9,714246 —	9,714222 —	9,713939 —	9,712156 —
$\lg \frac{1}{r_1 \cos\beta_1}$	0,285754 —	0,285778 —	0,286061 —	0,287844 —
$\lg\left(1 - \frac{n_1}{1} \cdot \frac{\cos\alpha_1}{\cos\beta_1}\right)$	9,714246 —	9,714286 —	9,714755 —	9,717709 —
$\lg \frac{1}{t''} =$	0,000000	0,000064	0,000816	0,005553
$\frac{1}{t''} =$	1,	9,999936	9,999184	0,994447
$t'' =$	1,	0,9998525	0,9981225	0,9872950
$-K''$	$-1{,}010033$	$-1{,}0400500$	$-1{,}0895670$	$-1{,}1568750$
$\Delta t'' =$	$-0{,}010033$	$-0{,}0401975$	$-0{,}0914445$	$-0{,}1695800$
$\lg \Delta t''$	8,001431 —	8,604199 —	8,961158 —	9,229375 —
$\lg \cos w_2$	9,997161	9,989042	9,976966	9,963593
$\lg \Delta s_t''$	7,998592 —	8,593241 —	8,938124 —	9,192968 —
$\Delta s_t''$	$-0{,}0099676$	$-0{,}039196$	$-0{,}086721$	$-0{,}155944$

§ 116. Der astigmatische Zustand einer Plankonvexlinse, wie er sich darstellt unter Verwendung von Hauptstrahlen, die durch den vorderen Hauptpunkt geführt werden.

Der vordere Hauptpunkt der plankonvexen Linse hat von der Planfläche die Entfernung

$$q_0 = 0{,}0566571 \,,$$

während der hintere Hauptpunkt bekanntlich im Scheitel der zweiten Fläche liegt. Der nachfolgenden Rechnung voraufgehend zu denken sind die ersten vier Zeilen der Rechnung auf S. 203.

	$w_0 = -10^0$	$w_0 = -20^0$	$w_0 = -30^0$	$w_0 = -40^0$
$\lg q_0$	8,753255 +	8,753255 +	8,753255 +	8,753255 +
$\lg \operatorname{tg} w_0$	9,246319 —	9,561066 —	9,761439 —	9,923814 —
$\lg \operatorname{cotg} w_1$	0,938713 —	0,635877 —	0,457332 —	0,330261 —
$\lg q'$	8,938287 +	8,950198 +	8,972026 +	9,007330 +
q'	$+0{,}0867534$	$+0{,}0891658$	$+0{,}0937618$	$+0{,}1017021$
$-d_1$	$-0{,}086$	$-0{,}086$	$-0{,}086$	$-0{,}086$
q_1	$+0{,}0007534$	$+0{,}0031658$	$+0{,}0077618$	$+0{,}0157021$

	$w_0 = -10^0$	$w_0 = -20^0$	$w_0 = -30^0$	$w_0 = -40^0$
$\lg q_1$	6,877026 +	7,500483 +	7,889962 +	8,195958 +
$\lg \frac{1}{r_1}$	0,285754 —	0,285754 —	0,285754 —	0,285754 —
$\lg \frac{q_1}{r_1}$	7,162780 —	7,786237 —	8,175716 —	8,481712 —
$\frac{q_1}{r_1}$	— 0,001455	— 0,006113	— 0,014987	— 0,030319
$1 - \frac{q_1}{r_1}$	+ 1,001455	+ 1,006113	+ 1,014987	+ 1,030319
$\lg\left(1 - \frac{q_1}{r_1}\right)$	0,000632 +	0,002647 +	0,006460 +	0,012972 +
$\lg \sin w_1$	9,058427 —	9,352809 —	9,517727 —	9,626824 —
$\lg \sin \alpha_1$	9,059059 —	9,355456 —	9,524187 —	9,639796 —
$\lg \frac{n_1}{n_0}$	0,181243	0,181243	0,181243	0,181243
$\lg \sin \beta_1$	9,240302 —	9,536699 —	9,705430 —	9,821039 —
w_1	— 6°34′ 8,5″	— 13° 1′ 19,1″	— 19°13′57,0″	— 25° 3′14,2″
$-\alpha_1$	+ 6°34′43,1″	+ 13° 6′ 10,8″	+ 19°31′56,4″	+ 25°52′ 7,4″
$w_1 - \alpha_1$	+ 0° 0′34,6″	+ 0° 4′ 51,7″	+ 0°17′59,4″	+ 0°48′53,2″
$-\beta_1$	— 10° 0′52,9″	— 20° 7′ 39,1″	— 30°29′49,2″	— 41°28′25,4″
w_2	— 10° 0′18,3″	— 20° 2′ 47,4″	— 30°11′49,8″	— 40°39′32,2″
$\lg \sin \beta_1$	9,240302 —	9,536699 —	9,705430 —	9,821039 —
$\lg \sin w_2$	9,239889 —	9,535019 —	9,701548 —	9,813951 —
$\lg \frac{\sin \beta_1}{\sin w_2}$	0,000413 +	0,001680 +	0,003882 +	0,007088 +
$\frac{\sin \beta_1}{\sin w_2}$	1,000951	1,003877	1,008979	1,016455
$1 - \frac{\sin \beta_1}{\sin w_2}$	— 0,000951	— 0,003877	— 0,008979	— 0,016455
$\lg\left(1 - \frac{\sin \beta_1}{\sin w_2}\right)$	6,978181 —	7,588496 —	7,953228 —	8,216298 —
$\lg r_1$	9,714246 —	9,714246 —	9,714246 —	9,714246 —
$\lg q''$	6,692427 +	7,302742 +	7,667474 +	7,930544 +
q''	+ 0,0004925233	+ 0,002007900	+ 0,004650222	+ 0,00852204
$\lg r_1$	9,714246 —	9,714246 —	9,714246 —	9,714246 —
$\lg \sin(w_1 - \alpha_1)$	6,224607 +	7,150511 +	7,718755 +	8,152902 +
$\lg h_1 =$	5,938853 —	6,864757 —	7,433001 —	7,867148 —
$\lg \sin w_1$	9,058427 —	9,352809 —	9,517727 —	9,626824 —
$\lg k_1 =$	6,880426 +	7,511748 +	7,915274 +	8,240324 +
$\lg h_1$	5,938853 —	6,864757 —	7,433001 —	7,867148 —
$\lg \sin w_2$	9,239889 —	9,535019 —	9,701548 —	9,813951 —
$\lg k''$	6,698964 +	7,329738 +	7,731453 +	8,053197 +

	$w_0 = -10°$	$w_0 = -20°$	$w_0 = -30°$	$w_0 = -40°$
q''	+ 0,0004925	+ 0,0020079	+ 0,0046502	+ 0,0085220
$-p''$	— 1,	— 1,	— 1,	— 1,
$q''-p''$	— 0,9995075	— 0,9979921	— 0,9953498	— 0,9914780
$\lg(q''-p'')$	9,999786 —	9,999127 —	9,997976 —	9,996283 —
$\lg\cos w_2$	9,993345	9,972857	9,936664	9,880014
$\lg L_2$	0,006441 —	0,026270 —	0,061312 —	0,116269 —
k''	+ 0,00049999	+ 0,002137	+ 0,005388	+ 0,0113038
$-L_2$	+ 1,014942	+ 1,062356	+ 1,151627	+ 1,306979
$K'' =$	+ 1,015442	+ 1,064493	+ 1,157015	+ 1,318282

Sagittalstrahl.

	$w_0 = -10°$	$w_0 = -20°$	$w_0 = -30°$	$w_0 = -40°$
$\lg\cos\alpha_1$	9,997131 +	9,988543 +	9,974260 +	9,954144 +
$\lg\cos\beta_1$	9,993332 +	9,972633 +	9,935334 +	9,874632 +
$\lg\frac{\cos\alpha_1}{\cos\beta_1}$	0,003799 +	0,015910 +	0,038926 +	0,079512 +
$\lg\frac{n_1}{n_0}$	0,181243 +	0,181243 +	0,181243 +	0,181243 +
$\lg\left(\frac{n_1}{n_0}\cdot\frac{\cos\alpha_1}{\cos\beta_1}\right)$	0,185042 +	0,197153 +	0,220169 +	0,260755 +
$\frac{n_1}{n_0}\cdot\frac{\cos\alpha_1}{\cos\beta_1}$	+ 1,531236	+ 1,574537	+ 1,660233	+ 1,822867
$1-\frac{n_1}{n_0}\cdot\frac{\cos\alpha_1}{\cos\beta_1}$	— 0,531236	— 0,574537	— 0,660233	— 0,822867
$\lg\left(1-\frac{n_1}{n_0}\cdot\frac{\cos\alpha_1}{\cos\beta_1}\right)$	9,725288 —	9,759318 —	9,819697 —	9,915330 —
$\lg\cos\beta_1$	9,993332 +	9,972633 +	9,935334 +	9,874632 +
$\lg\frac{1}{r_1}$	0,285754 —	0,285754 —	0,285754 —	0,285754 —
$\lg\frac{1}{\sigma''}$	0,004374 +	0,017705 +	0,040785 +	0,075716 +
$\lg\sigma''$	9,995626 +	9,982295 +	9,959215 +	9,924284 +
σ''	+ 0,989980	+ 0,9600525	+ 0,9103640	+ 0,8400100
$-K''$	— 1,015442	— 1,064493	— 1,157015	— 1,318282
$\Delta\sigma''$	— 0,025462	— 0,1044405	— 0,2466510	— 0,4782720
$\lg\Delta\sigma''$	8,405893 —	9,018867 —	9,392083 —	9.679675 —
$\lg\cos w_2$	9,993345 +	9,972857 +	9,936664 +	9,880014 +
$\lg\Delta s''_\sigma$	8,399238 —	8,991724 —	9,328747 —	9,559689 —
$\Delta s''_\sigma$	— 0,025075	— 0,098112	— 0,213180	— 0,362818

Meridionalstrahl.

	$w_0 = -10^0$	$w_0 = -20^0$	$w_0 = -30^0$	$w_0 = -40^0$
$\lg \cos \beta_1$	9,993332 +	9,972633 +	9,935334 +	9,874632 +
$\lg r_1$	9,714246 —	9,714246 —	9,714246 —	9,714246 —
$\lg (r_1 \cdot \cos \beta_1)$	9,707578 —	9,686879 —	9,649580 —	9,588878 —
$\lg \frac{1}{r_1 \cdot \cos \beta_1}$	0,292422 —	0,313121 —	0,350420 —	0,411122 —
$\lg \left(1 - \frac{n_1}{n_0} \cdot \frac{\cos \alpha_1}{\cos \beta_1}\right)$	9,725288 —	9,759318 —	9,819697 —	0,915330 —
$\lg \frac{1}{t''}$	0,017710 +	0,072439 +	0,170117 +	0,326452 +
$\lg t''$	9,98[illegible]290 +	9,927561 +	9,829883 +	9,673548 +
t''	+ 0,96[illegible]42	+ 0,846372	+ 0,6759014	+ 0,4715722
$-K''$	— 1,01[illegible]442	— 1,064493	— 1,157015	— 1,318282
$\Delta t''$	— 0,055400	— 0,218121	— 0,481114	— 0,846710
$\lg \Delta t''$	8,743510 —	9,338697 —	9,682248 —	9,927735 —
$\lg \cos w_2$	9,993345 +	9,972857 +	9,936664 +	9,880014 +
$\lg \Delta s_i''$	8,736855 —	9,311554 —	9,618912 —	9,807749 —
$\Delta s_i''$	— 0,054558	— 0,204906	— 0,415826	— 0,642317

§ 117. Bemerkungen zu den vorstehenden Rechnungen.

Wie wir oben (§ 88 S. 148) ausführlich dargelegt haben, liefert die Plankonvexlinse von einem fernen Objektpunkte ein zwar gewölbtes, aber vom Astigmatismus vollständig freies Bild. Durch die auf den Mittelpunkt der natürlichen Blende bezogenen Hauptstrahlen wird dieses Verhalten in der Tat sehr annähernd dargestellt. Denn die in der Richtung des betreffenden Bündels gerechnete astigmatische Differenz

$$\Delta = \sigma'' - t''$$

ergibt sich nach § 115 für die verschiedenen Strahlenneigungen:

$$\Delta \text{ für } w_0 = -10^0 = 1{,}000000 - 1{,}000000 = 0\,,$$

$$\text{„ „ } w_0 = -20^0 = 0{,}999967 - 0{,}999852 = 0{,}000115\,,$$

$$\text{„ „ } w_0 = -30^0 = 0{,}999535 - 0{,}998122 = 0{,}001413\,,$$

$$\text{„ „ } w_0 = -40^0 = 0{,}996844 - 0{,}987295 = 0{,}009549\,.$$

Bei einer Strahlenneigung von 30^0 beträgt die Abweichung von der Wirklichkeit erst ca. $^1/_{10}\,\%$.

Vergleicht man mit diesen Resultaten die Rechnung, welche sich auf die durch den ersten Hauptpunkt gehenden Hauptstrahlen bezieht, so sieht man, daß man in dem letzteren Falle zu einer ganz falschen Vorstellung über den Strahlengang gelangt. Und doch ist diese letztere Methode bisher sehr häufig angewendet worden.

Bildet man nämlich hiernach die astigmatischen Differenzen Δ für verschiedene Strahlenneigungen, so ergibt sich nach § 116:

$\Delta = \sigma'' - t''$ für

$w_0 = -10^0$	$0{,}989980 - 0{,}960042 = 0{,}029938$
$w_0 = -20^0$	$0{,}960052 - 0{,}846372 = 0{,}113680$
$w_0 = -30^0$	$0{,}910364 - 0{,}675901 = 0{,}234463$
$w_0 = -40^0$	$0{,}840010 - 0{,}471572 = 0{,}368438$

Die Zahlen weisen auf ein stark astigmatisches Bildfeld hin; bei 30⁰ bereits beträgt der Fehler 23 %, d. h. ein Objektiv von 100 mm Brennweite hat hiernach für Strahlen, die unter 30⁰ Neigung einfallen, eine Entfernung der beiden astigmatischen Bildpunkte von 23,44 mm, eine Abweichung von der Wirklichkeit, wie sie krasser nicht vermutet werden konnte.

Sehr lehrreich ist die obige Durchrechnung auch hinsichtlich der Beurteilung des orthoskopischen Zustandes der Plankonvexlinse. Dieser wird mit großer Treue durch die Rechnung gezeigt, welche sich auf den Mittelpunkt der natürlichen Blende stützt.

Dieser Zustand ist sehr mangelhaft; den objektseitigen Strahlenneigungen von

$$w_0 = -10^0, \quad -20^0, \quad -30^0, \quad -40^0$$

entsprechen die bildseitigen Neigungen der Hauptstrahlen von

$$w_2 = -6^0 32', \quad -12^0 49', \quad -18^0 29', \quad -23^0 8' \text{ zirka,}$$

während die Rechnung für die durch den ersten Hauptpunkt gehenden Strahlen das Resultat ergibt:

$$w_2 = -10^0 0', \quad -20^0 3', \quad -30^0 12', \quad -40^0 40'.$$

Die letzteren Zahlen würden auf einen sehr befriedigenden orthoskopischen Zustand schließen lassen, der jedoch in der Tat gar nicht besteht.

§ 118. Rechnungsbeispiel für den astigmatischen Korrektionszustand eines symmetrischen Objektives mittels Fundamentalstrahlen.

Um auch ein vollständiges Beispiel zur Feststellung des astigmatischen Korrektionszustandes für ein aus mehreren Flächen bestehendes System zu geben, wählen wir den sogenannten „Hypergondoppelanastigmaten“, der durch seine weitgehende Bildebenung die größte Aufmerksamkeit verdient. Wie wir oben (§ 99) auseinandergesetzt haben, können wir für den vorliegenden Fall, da ein symmetrisches Objektiv in Frage kommt, den vorderen Hauptpunkt als Kreuzungspunkt der Fundamentalstrahlen ansehen.

Hypergon.

	lg		lg	D-Linie
$r_0 = +0{,}08572220$	[8,933093]	$d_1 = 0{,}0221222$	[8,344828]	$n_0 = 1,$
$r_1 = +0{,}08632217$	[8,936122]	$d_2 = 0{,}1378777$	[9,139494]	$n_1 = 1{,}51054$
$r_2 = -0{,}08632217$	[8,936122]	$d_3 = 0.0221222$	[8,344828]	$n_2 = 1,$
$r_3 = -0{,}08572220$	[8,933093]			$n_3 = 1{,}51054$
				$n_4 = 1.$

Paraxialstrahlen.

	1. Fläche	2. Fläche	3. Fläche	4. Fläche
$\lg \frac{1}{p_0}$		0,635441 +	9,823891 +	0,508682 —
$\lg \frac{n_0}{n_1}$		0,179132 +	9,820868 +	0,179132 +
$\lg \left(\frac{1}{p_0} \cdot \frac{n_0}{n_1}\right)$		0,814573 +	9,644759 +	0,687814 —
$\lg \frac{1}{r_0}$	1,066907 +	1,063878 +	1,063878 —	1,066907 —
$\lg (n_1 - n_0)$	9,708030 +	9,708030 —	9,708030 +	9,708030 —
$\lg \frac{1}{n_1}$	9,820868 +	0,	9,820868 +	0,
$\lg \left(\frac{1}{r_0} \cdot \frac{n_1 - n_0}{n_1}\right)$	0,595805 +	0,771908 —	0,592776 —	0,774937 +
$\frac{1}{p_0} \cdot \frac{n_0}{n_1}$	0,	+ 6,524886	+ 0,441326	— 4,873200
$\frac{1}{r_0} \cdot \frac{n_1 - n_0}{n_1}$	+ 3,9428	— 5,914363	— 3,915400	+ 5,955757
$\frac{1}{p'}$	+ 3,9428	+ 0,610523	— 3,474074	$\frac{1}{p^4}$ + 1,082557

Hypergon.

Paraxialstrahlen.

	1. Fläche	2. Fläche	3. Fläche		4. Fläche
$\lg \frac{1}{p'}$	0,595805 +	9,785702 +	0,540839 —	$\lg \frac{1}{p^4}$	0,034451 +
$\lg d_1$	8,344828 +	9,139494 +	8,344828 +	$\lg p^4$	9,965549 +
$\lg \frac{d_1}{p'}$	8,940633 +	8,925196 +	8,885667 —	p^4	+ 0,923738
$\frac{d_1}{p'}$	+ 0,0872234	+ 0,0841775	— 0,076854		
$1 - \frac{d_1}{p'}$	+ 0,9127766	+ 0,9158225	+ 1,076854		
$\lg \frac{1}{p'}$	0,595805 +	9,785702 +	0,540839 —		
$\lg\left(1 - \frac{d_1}{p'}\right)$	9,960364 +	9,961811 +	0,032157 +		
$\lg \frac{1}{p_1}$	0,635441 +	9,823891 +	0,508682 —		

$\lg\left(1 - \frac{d_1}{p'}\right)$	9,960364 +
$\lg\left(1 - \frac{d_2}{p''}\right)$	9,961811 +
$\lg\left(1 - \frac{d_3}{p'''}\right)$	0,032157 +
$\lg \frac{1}{p^4}$	0,034451 +
$\lg(1 : f)$	9,988783 +
$\lg f$	0,011217 +
f	+ 1,026164
$-p^4$	0,923738
$f - p^4$	0,102426 = $\mathfrak{H}_2 = q_0$

$\mathfrak{H}_2$ ist die Entfernung des hinteren Hauptpunktes von der letzten brechenden Fläche. Wegen der Symmetrie des Systemes ist $\mathfrak{H}_2$ auch zugleich die Entfernung des vorderen Hauptpunktes von der ersten brechenden Fläche und geht in die folgende Rechnung als q_0 ein, da ja die Hauptstrahlen hier durch den vorderen Hauptpunkt gehen.

Hypergon.

Fundamentalstrahlen $q_0 = 0{,}102426$.

	$w_0 = -10^\circ$	$w_0 = -30^\circ$	$w_0 = -50^\circ$	$w_0 = -70^\circ$
$\lg q_0$	9,010410 +			
$\lg \frac{1}{r_0}$	1,066907 +			
$\lg\left(q_0 \cdot \frac{1}{r_0}\right)$	0,077317 +			
$q_0 \cdot \frac{1}{r_0}$	+ 1,194859			
$1 - q_0 \cdot \frac{1}{r_0}$	— 0,194859			
$\lg\left(1 - q_0 \cdot \frac{1}{r_0}\right)$	9,289721 —	9,289721 —	9,289721 —	9,289721 —
$\lg \sin w_0$	9,239670 —	9,698970 —	9,884254 —	9,972986 —
$\lg \sin \alpha_0$	8,529391 +	8,988691 +	9,173975 +	9,262707 +
$\lg \frac{1}{n_1}$	9,820868 +	9,820868 +	9,820868 +	9,820868 +
$\lg \sin \beta_0$	8,350259 +	8,809559 +	8,994843 +	9,083575 +
$\lg \sin w_1$	9,266946 —	9,722910 —	9,901854 —	9,981935 —
$\lg \frac{\sin \beta_0}{\sin w_1}$	9,083313 —	9,086649 —	9,092989 —	9,101640 —
w_0	— 10°	— 30°	— 50°	— 70°
$-\alpha_0$	— 1°56′20,7″	— 5°35′28,2″	— 8°35′ 4,8″	— 10°33′ 3,0″
$w_0 - \alpha_0$	— 11°56′20,7″	— 35°35′28,2″	— 58°35′ 4,8″	— 80°33′ 3,0″
$+\beta_0$	+ 1°17′ 0,8″	+ 3°41′53,3″	+ 5°40′16,3″	+ 6°57′45,1″
w_1	— 10°39′19,9″	— 31°53′34,9″	— 52°54′48,5″	— 73°35′17,9″
$\frac{\sin \beta_0}{\sin w_1}$	— 0,1211471	— 0,122081	— 0,123877	— 0,126369
$1 - \frac{\sin \beta_0}{\sin w_1}$	+ 1,121147	+ 1,122081	+ 1,123877	+ 1,126369
$\lg\left(1 - \frac{\sin \beta_0}{\sin w_1}\right)$	0,049662 +	0,050025 +	0,050719 +	0,051681 +
$\lg r_0$	8,933093 +	8,933093 +	8,933093 +	8,933093 +
$\lg q'$	8,982755 +	8,983118 +	8,983812 +	8,984774 +
q'	+ 0,0961070	+ 0,0961874	+ 0,0963412	+ 0,0965548
$-d_1$	— 0,0221222	— 0,0221222	— 0,0221222	— 0,0221222
q_1	+ 0,0739848	+ 0,0740652	+ 0,0742190	+ 0,0744326
$\lg q_1$	8,869143 +	8,869614 +	8,870515 +	8,871764 +
$\lg \frac{1}{r_1}$	1,063878 +	1,063878 +	1,063878 +	1,063878 +
$\lg\left(q_1 \cdot \frac{1}{r_1}\right)$	9,933021 +	9,933492 +	9,934393 +	9,935642 +

Hypergon.

Fundamentalstrahlen $q_0 = 0{,}102426$.

	$w_0 = -10°$	$w_0 = -30°$	$w_0 = -50°$	$w_0 = -70°$
$q_1 \cdot \frac{1}{r_1}$	+ 0,857080	+ 0,858010	+ 0,859792	+ 0,862268
$1 - q_1 \cdot \frac{1}{r_1}$	+ 0,142920	+ 0,141990	+ 0,140208	+ 0,137732
$\lg\left(1 - q_1 \cdot \frac{1}{r_1}\right)$	9,155093 +	9,152258 +	9,146773 +	9,139035 +
$\lg \sin w_1$	9,266946 —	9,722910 —	9,901854 —	9,981935 —
$\lg \sin \alpha_1$	8,422039 —	8,875168 —	9,048627 —	9,120970 —
$\lg \frac{n_1}{n_2}$	0,179132 +	0,179132 +	0,179132 +	0,179132 +
$\lg \sin \beta_1$	8,601171 —	9,054300 —	9,227759 —	9,300102 —
$\lg \sin w_2$	9,297001 —	9,748654 —	9,919686 —	9,989596 —
$\lg \frac{\sin \beta_1}{\sin w_2}$	9,304170 +	9,305646 +	9,308073 +	9,310506 +
w_1	— 10°39′19,9″	— 31°53′34,9″	— 52°54′48,5″	— 73°35′17,9″
$-\alpha_1$	+ 1°30′51,5″	+ 4°18′ 8,2″	+ 6°25′18,6″	+ 7°35′31,7″
$w_1 - \alpha_1$	— 9° 8′28,4″	— 27°35′26,7″	— 46°29′29,9″	— 65°59′46,2″
$+\beta_1$	— 2°17′15,9″	— 6°30′23,9″	— 9°43′36,4″	— 11°30′43,2″
w_2	— 11°25′44,3″	— 34° 5′50,6″	— 56°13′ 6,3″	— 77°30′29,4″
$\frac{\sin \beta_1}{\sin w_2}$	+ 0,2014514	+ 0,2021371	+ 0,2032700	+ 0,204412
$1 - \frac{\sin \beta_1}{\sin w_2}$	+ 0,7985486	+ 0,7978629	+ 0,7967300	+ 0,795588
$\lg\left(1 - \frac{\sin \beta_1}{\sin w_2}\right)$	9,902301 +	9,901928 +	9,901311 +	9,900688 +
$\lg r_1$	8,936122 +	8,936122 +	8,936122 +	8,936122 +
$\lg q''$	8,838423 +	8,838050 +	8,837433 +	8,836810 +
q''	+ 0,06893233	+ 0,06887317	+ 0,06877533	+ 0,06867683
$-d_2$	— 0,1378777	— 0,1378777	— 0,1378777	— 0,1378777
q_2	— 0,06894537	— 0,06900453	— 0,06910237	— 0,06920087
$\lg q_2$	8,838505 —	8,838878 —	8,839493 —	8,840111 —
$\lg \frac{1}{r_2}$	1,063878 —	1,063878 —	1,063878 —	1,063878 —
$\lg\left(q_2 \cdot \frac{1}{r_2}\right)$	9,902383 +	9,902756 +	9,903371 +	9,903989 +

Hypergon.

Fundamentalstrahlen $q_0 = 0{,}102426$.

	$w_0 = -10^\circ$	$w_0 = -30^\circ$	$w_0 = -50^\circ$	$w_0 = -70^\circ$
$q_2 \cdot \frac{1}{r_2}$	+ 0,7986983	+ 0,799385	+ 0,8005283	+ 0,801658
$1 - q_2 \cdot \frac{1}{r_2}$	+ 0,2013017	+ 0,200615	+ 0,1994817	+ 0,198342
$\lg\left(1 - q_2 \cdot \frac{1}{r_2}\right)$	9,303848 +	9,302364 +	9,299903 +	9,297414 +
$\lg \sin w_2$	9,297001 —	9,748654 —	9,919686 —	9,989596 —
$\lg \sin \alpha_2$	8,600849 —	9,051018 —	9,219589 —	9,287010 —
$\lg \frac{n_2}{n_3}$	9,820868 +	9,820868 +	9,820868 +	9,820868 +
$\lg \sin \beta_2$	8,421717 —	8,871886 —	9,040457 —	9,107878 —
$\lg \sin w_3$	9,266968 —	9,723114 —	9,902213 —	9,982201 —
$\lg \frac{\sin \beta_2}{\sin w_3}$	9,154749 +	9,148772 +	9,138244 +	9,125677 +
w_2	— 11°25′44,3″	— 34° 5′50,6″	— 56°13′ 6,3″	— 77°30′29,4″
$-\alpha_2$	+ 2°17′ 9,8″	+ 6°27′26,8″	+ 9°32′37,7″	+ 11° 9′56,4″
$w_2 - \alpha_2$	— 9° 8′34,5″	— 27°38′23,8″	— 46°40′28,6″	— 66°20′33,0″
$+\beta_2$	— 1°30′47,4″	— 4°16′11,4″	— 6°18′ 6,0″	— 7°21′55,5″
w_3	— 10°39′21,9″	— 31°54′35,2″	— 52°58′34,6″	— 73°42′28,5″
$\frac{\sin \beta_2}{\sin w_3}$	+ 0,1428068	+ 0,1408548	+ 0,1374813	+ 0,1335603
$1 - \frac{\sin \beta_2}{\sin w_3}$	+ 0,8571932	+ 0,8591452	+ 0,8625187	+ 0,8664397
$\lg\left(1 - \frac{\sin \beta_2}{\sin w_3}\right)$	9,933079 +	9,934067 +	9,935768 +	9,937738 +
$\lg r_2$	8,936122 —	8,936122 —	8,936122 —	8,936122 —
$\lg q'''$	8,869201 —	8,870189 —	8,871890 —	8,873860 —
q'''	— 0,0739948	— 0,0741633	— 0,0744543	— 0,0747928
$-d_2$	— 0,0221222	— 0,0221222	— 0,0221222	— 0,0221222
q_3	— 0,0961170	— 0,0962855	— 0,0965765	— 0,0969150
$\lg q_3$	8,982800 —	8,983561 —	8,984872 —	8,986391 —
$\lg \frac{1}{r_3}$	1,066907 —	1,066907 —	1,066907 —	1,066907 —
$\lg\left(q_3 \cdot \frac{1}{r_3}\right)$	0,049707 +	0,050468 +	0,051779 +	0,053298 +

Hypergon.

Fundamentalstrahlen $q_0 = 0{,}102426$.

	$w_0 = -10°$	$w_0 = -30°$	$w_0 = -50°$	$w^0 = -70°$
$q_3 \cdot \frac{1}{r_3}$	+ 1,121262	+ 1,123228	+ 1,126624	+ 1,130571
$1 - q_3 \cdot \frac{1}{r_3}$	— 0,121262	— 0,123228	— 0,126624	— 0,130571
$\lg\left(1 - q_3 \cdot \frac{1}{r_3}\right)$	9,083725 —	9,090709 —	9,102516 —	9,115846 —
$\lg \sin w_3$	9,266968 —	9,723114 —	9,902213 —	9,982201 —
$\lg \sin \alpha_3$	8,350693 +	8,813823 +	9,004729 +	9,098047 +
$\lg n_3$	0,179132 +	0,179132 +	0,179132 +	0,179132 +
$\lg \sin \beta_3$	8,529825 +	8,992955 +	9,183861 +	9,277179 +
$\lg \sin w_4$	9,239666 —	9,698943 —	9,884220 —	9,972971 —
$\lg \frac{\sin \beta_3}{\sin w_4}$	9,290159 —	9,294012 —	9,299641 —	9,304208 —
w_3	— 10°39′21,9″	— 31°54′35,2″	— 52°58′34,6″	— 73°42′28,5″
$-\alpha_3$	— 1°17′ 5,5″	— 3°44′ 4,8″	— 5°48′ 8,0″	— 7°11′58,9″
$w_3 - \alpha_3$	— 11°56′27,4″	— 35°38′40,0″	— 58°46′42,6″	— 80°54′27,4″
$+\beta_3$	+ 1°56′27,7″	+ 5°38′47,5″	+ 8°47′ 2,0″	+ 10°54′45,6″
w_4	— 9°59′59,7″	— 29°59′52,5″	— 49°59′40,6″	— 69°59′41,8″
$\frac{\sin \beta_3}{\sin w_4}$	— 0,195056	— 0,196794	— 0,199361	— 0,201469
$1 - \frac{\sin \beta_3}{\sin w_4}$	+ 1,195056	+ 1,196794	+ 1,199361	+ 1,201469
$\lg\left(1 - \frac{\sin \beta_3}{\sin w_4}\right)$	0,077388 +	0,078020 +	0,078950 +	0,079713 +
$\lg r_3$	8,933093 —	8,933093 —	8,933093 —	8,933093 —
$\lg q^4$	9,010481 —	9,011113 —	9,012043 —	9,012806 —
q^4	— 0,1024426	— 0,1025919	— 0,1028119	— 0,1029926
$\lg r_0$	8,933093 +	8,933093 +	8,933093 +	8,933093 +
$\lg \sin(w_0 - \alpha_0)$	9,315701 —	9,764921 —	9,931158 —	9,994067 —
$\lg h_0$	8,248794 —	8,698014 —	8,864251 —	8,927160 —
h_0	— 0,01773348	— 0,0498900	— 0,07315617	— 0,0845590
$\lg r_1$	8,936122 +	8,936122 +	8,936122 +	8,936122 +
$\lg \sin(w_1 - \alpha_1)$	9,201038 —	9,665724 —	9,860502 —	9,960717 —
$\lg h_1$	8,137160 —	8,601846 —	8,796624 —	8,896839 —
$h_1 =$	— 0,01371388	— 0,03998027	— 0,06260714	— 0,0788568
$\lg r_2$	8,936122 —	8,936122 —	8,936122 —	8,936122 —
$\lg \sin(w_2 - \alpha_2)$	9,201118 —	9,666437 —	9,861814 —	9,961877 —
$\lg h_2$	8,137240 +	8,602559 +	8,797936 +	8,897999 +
h_2	+ 0,01371641	+ 0,04004600	+ 0,06279657	+ 0,07906767

Hypergon.

Fundamentalstrahlen $q_0 = 0{,}102426$.

	$w_0 = -10^\circ$	$w_0 = -30^\circ$	$w_0 = -50^\circ$	$w_0 = -70^\circ$
$\lg r_3$	8,933093 —	8,933093 —	8,933093 —	8,933093 —
$\lg \sin(w_3 - \alpha_3)$	9,315767 —	9,765485 —	9,932052 —	9,994508 —
$\lg h_3$	8,248860 +	8,698578 +	8,865145 +	8,927601 +
h_3	+ 0,01773617	+ 0,04995489	+ 0,07330700	+ 0,08464500
$\lg h_3$	8,248860 +	8,698578 +	8,865145 +	8,927601 +
$\lg \sin w_4$	9,239666 —	9,698943 —	9,884220 —	9,972971 —
$\lg k^4$	9,009194 —	8,999635 —	8,980925 —	8,954630 —
k^4	— 0,1021395	— 0,0999160	— 0,0957028	— 0,09008040
q^4	— 0,1024426	— 0,1025919	— 0,1028119	— 0,1029926
$-p^4$	— 0,9237380	— 0,9237380	— 0,9237380	— 0,9237380
$q^4 - p^4$	— 1,0261806	— 1,0263299	— 1,0265499	— 1,0267306
$\lg(q^4 - p^4)$	0,011224 —	0,011287 —	0,011380 —	0,011457 —
$\lg \cos w_4$	9,993351 +	9,937540 +	9,808116 +	9,534157 +
$\lg L^4$	0,017873 —	0,073747 —	0,203264 —	0,477300 —
k^4	— 0,1021395	— 0,0999160	— 0,0957028	— 0,09008040
$-L^4$	+ 1,042012	+ 1,185078	+ 1,596848	+ 3,001236
K^4	+ 0,9398725	+ 1,0851620	+ 1,501145	+ 2,911156

Hypergon.

Sagittalstrahl.

	$w_0 = -10^\circ$	$w_0 = -30^\circ$	$w_0 = -50^\circ$	$w_0 = -70^\circ$
$\lg \cos \alpha_0$	9,999751 +	9,997929 +	9,995107 +	9,992595 +
$\lg \frac{n_0}{n_1}$	9,820868 +	9,820868 +	9,820868 +	9,820868 +
$\lg \frac{1}{\cos \beta_0}$	0,000109 +	0,000905 +	0,002131 +	0,003215 +
$\lg\left(\frac{n_0}{n_1} \cdot \frac{\cos \alpha_0}{\cos \beta_0}\right)$	9,820728 +	9,819702 +	9,818106 +	9,816678 +
$\frac{n_0}{n_1} \cdot \frac{\cos \alpha_0}{\cos \beta_0}$	+ 0,6618017	+ 0,6602400	+ 0,6578186	+ 0,6556586
$1 - \frac{n_0}{n_1} \cdot \frac{\cos \alpha_0}{\cos \beta_0}$	+ 0,3381983	+ 0,3397600	+ 0,3421814	+ 0,3443414
$\lg\left(1 - \frac{n_0}{n_1} \cdot \frac{\cos \alpha_0}{\cos \beta_0}\right)$	9,529172 +	9,531172 +	9,534257 +	9,536989 +
$\lg \cos \beta_0$	9,999891 +	9,999095 +	9,997869 +	9,996785 +
$\lg \frac{1}{r_0}$	1,066907 +	1,066907 +	1,066907 +	1,066907 +
$\lg \frac{1}{—}$	0,595970 +	0,597174 +	0,599033 +	0,600681 +
$\lg \sigma'$	9,404030 +	9,402826 +	9,400967 +	9,399319 +

Hypergon.

Sagittalstrahl.

	$w_0 = -10°$	$w_0 = -30°$	$w_0 = -50°$	$w_0 = -70°$
h_0	−0,01773348	−0,0498900	−0,07315617	−0,0845590
$-h_1$	+0,01371388	+0,03998027	+0,06260714	+0,0788568
$h_0 - h_1$	−0,00401960	−0,00990973	−0,01054903	−0,0057022
$\lg(h_0 - h_1)$	7,604183 −	7,996062 −	8,023212 −	7,756042 −
$\lg \sin w_1$	9,266946 −	9,722910 −	9,901854 −	9,981935 −
$\lg \frac{h_0 - h_1}{\sin w_1}$	8,337237 +	8,273152 +	8,121358 +	7,774107 +
σ'	+0,2535306	+0,2528283	+0,2517488	+0,2507950
$\frac{h_0 - h_1}{\sin w_1}$	−0,0217389	−0,0187565	−0,0132238	−0,0059444
σ_1	+0,2317917	+0,2340718	+0,2385250	+0,2448506
$\lg \sigma_1$	9,365098 +	9,369349 +	9,377539 +	9,388901 +
$\lg \frac{1}{\sigma_1}$	0,634902 +	0,630651 +	0,622461 +	0,611099 +
$\lg \frac{n_1}{n_2}$	0,179132 +	0,179132 +	0,179132 +	0,179132 +
$\lg\left(\frac{1}{\sigma_1} \cdot \frac{n}{n_1}\right)$	0,814034 +	0,809783 +	0,801593 +	0,790231 +
$\lg \cos \alpha_1$	9,999848 +	9,998774 +	9,997266 +	9,996176 +
$\lg \frac{n_1}{n_2}$	0,179132 +	0,179132 +	0,179132 +	0,179132 +
$\lg \frac{1}{\cos \beta_1}$	0,000347 +	0,002807 +	0,006289 +	0,008826 +
$\lg\left(\frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{\cos \alpha_1}{\cos \beta_1}\right)$	0,179327 +	0,180713 +	0,182687 +	0,184134 +
$\frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{\cos \alpha_1}{\cos \beta_1}$	+1,511217	+1,516048	+1,522955	+1,528038
$1 - \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{\cos \alpha_1}{\cos \beta_1}$	−0,511217	−0,516048	−0,522955	−0,528038
$\lg\left(1 - \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{\cos \alpha_1}{\cos \beta_1}\right)$	9,708605 −	9,712690 −	9,718464 −	9,722665 −
$\lg \cos \beta_1$	9,999653 +	9,997193 +	9,993711 +	9,991174 +
$\lg \frac{1}{r_1}$	1,063878 +	1,063878 +	1,063878 +	1,063878 +
$\lg\left[\frac{\cos \beta_1}{r_1}\left(1 - \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{\cos \alpha_1}{\cos \beta_1}\right)\right]$	0,772136 −	0,773761 −	0,776053 −	0,777717 −
$\frac{\cos \beta_1}{r_1}\left(1 - \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{\cos \alpha_1}{\cos \beta_1}\right)$	−5,917471	−5,939650	−5,971086	−5,994000
$\frac{1}{\sigma_1} \cdot \frac{n_1}{n_2}$	+6,516800	+6,453314	+6,332757	+6,169229
$\frac{1}{\sigma''}$	+0,599329	+0,513664	+0,361671	+0,175229

ypergon.

Sagittalstrahl.

	$w_0 = -10^\circ$	$w_0 = -30^\circ$	$w_0 = -50^\circ$	$w_0 = -70^\circ$
$\lg \frac{1}{\sigma''}$	9,777665 +	9,710679 +	9,558313 +	9,243606 +
$\lg \sigma''$	0,222335 +	0,289321 +	0,441687 +	0,756394 +
h_1	− 0,01371388	− 0,03998027	− 0,06260714	− 0,0788568
$-h_2$	− 0,01371641	− 0,04004600	− 0,06279657	− 0,0790677
$h_1 - h_2$	− 0,02743029	− 0,08002627	− 0,12540371	− 0,1579245
$\lg(h_1 - h_2)$	8,438231 −	8,903233 −	9,098311 −	9,198450 −
$\lg \sin w_2$	9,297001 −	9,748654 −	9,919686 −	9,989596 −
$\lg \frac{h_1 - h_2}{\sin w_2}$	9,141230 +	9,154579 +	9,178625 +	9,208854 +
σ''	+ 1,668535	+ 1,946800	+ 2,764950	+ 5,706814
$-\frac{h_1 - h_2}{\sin w_2}$	− 0,138430	− 0,142751	− 0,150878	− 0,161754
σ_2	+ 1,530105	+ 1,804049	+ 2,614072	+ 5,545060
$\lg \sigma_2$	0,184721 +	0,256249 +	0,417318 +	0,743906 +
$\lg \frac{1}{\sigma_2}$	9,815279 +	9,743751 +	9,582682 +	9,256094 +
$\lg \frac{n_2}{n_3}$	9,820868 +	9,820868 +	9,820868 +	9,820868 +
$\lg\left(\frac{1}{\sigma_2} \cdot \frac{n_2}{n_3}\right)$	9,636147 +	9,564619 +	9,403550 +	9,076962 +
$\lg \cos \alpha_2$	9,999654 +	9,997236 +	9,993947 +	9,991700 +
$\lg \frac{n_2}{n_3}$	9,820868 +	9,820868 +	9,820868 +	9,820868 +
$\lg \frac{1}{\cos \beta_2}$	0,000152 +	0,001207 +	0,002631 +	0,003599 +
$\lg\left(\frac{n_2}{n_3} \cdot \frac{\cos \alpha_2}{\cos \beta_2}\right)$	9,820674 +	9,819311 +	9,817446 +	9,816167 +
$\frac{n_2}{n_3} \cdot \frac{\cos \alpha_2}{\cos \beta_2}$	+ 0,6617200	+ 0,6596457	+ 0,6568200	+ 0,6548883
$1 - \frac{n_2}{n_3} \cdot \frac{\cos \alpha_2}{\cos \beta_2}$	+ 0,3382800	+ 0,3403543	+ 0,3431800	+ 0,3451117
$\lg\left(1 - \frac{n_2}{n_3} \cdot \frac{\cos \alpha_2}{\cos \beta_2}\right)$	9,529276 +	9,531932 +	9,535522 +	9,537960 +
$\lg \cos \beta_2$	9,999848 +	9,998793 +	9,997369 +	9,996401 +
$\lg \frac{1}{r_2}$	1,063878 −	1,063878 −	1,063878 −	1,063878 −
$\lg\left[\frac{\cos \beta_2}{r_2}\left(1 - \frac{n_2}{n_3} \cdot \frac{\cos \alpha_2}{\cos \beta_2}\right)\right]$	0,593002 −	0,594603 −	0,596769 −	0,598239 −

Hypergon.

Sagittalstrahl.

	$w_0 = -10^\circ$	$w_0 = -30^\circ$	$w_0 = -50^\circ$	$w_0 = -70^\circ$
$\frac{\cos\beta_2}{r_2}\left(1 - \frac{n_2}{n_3} \cdot \frac{\cos\alpha_2}{\cos\beta_2}\right)$	— 3.917436	— 3.931908	— 3.951564	— 3.964964
$\frac{1}{\sigma_2} \cdot \frac{n_2}{n_3}$	+ 0.432660	+ 0.366960	+ 0.253251	+ 0.119388
$\frac{1}{\sigma'''}$	— 3.484776	— 3.564948	— 3.698313	— 3.845576
$\lg \frac{1}{\sigma'''}$	0.542175 —	0.552053 —	0.568004 —	0.584961 —
$\lg \sigma'''$	9.457825 —	9.447947 —	9.431996 —	9.415039 —
h_2	+ 0.01371641	+ 0.04004600	+ 0,06279657	+ 0.07906767
$-h_3$	— 0.01773617	— 0.04995489	— 0.07330700	— 0.08464500
$h_2 - h_3$	— 0.00401976	— 0.00990889	— 0.01051043	— 0.00557733
$\lg (h_2 - h_3)$	7.604200 —	7.996025 —	8.021621 —	7.746426 —
$\lg \sin w_3$	9.266968 —	9.723114 —	9.902213 —	9.982201 —
$\lg \frac{h_2 - h_3}{\sin w_3}$	8.337232 +	8,272911 +	8.119408 +	7.764225 +
σ'''	— 0.2869627	— 0.2805093	— 0.2703931	— 0,2600394
$-\frac{h_2 - h_3}{\sin w_3}$	— 0.0217386	— 0.0187461	— 0,0131646	— 0,0058107
σ_3	— 0.3087013	— 0.2992554	— 0,2835577	— 0,2658501
$\lg \sigma_3$	9.489539 —	9.476042 —	9.452641 —	9.424637 —
$\lg \frac{1}{\sigma_3}$	0.510461 —	0.523958 —	0.547359 —	0.575363 —
$\lg \frac{n_3}{n_4}$	0.179132 +	0.179132 +	0.179132 +	0,179132 +
$\lg\left(\frac{1}{\sigma_3} \cdot \frac{n_3}{n_4}\right)$	0.689593 —	0.703090 —	0.726491 —	0.754495 —
$\lg \cos \alpha_3$	9.999891 +	9.999077 +	9.997769 +	9.996562 +
$\lg \frac{n_3}{n_4}$	0.179132 +	0,179132 +	0.179132 +	0.179132 +
$\lg \cos \frac{1}{\beta_3}$	0,000249 +	0.002113 +	0,005124 +	0,007925 +
$\lg\left(\frac{n_3}{n_4} \cdot \frac{\cos\alpha_3}{\cos\beta_3}\right)$	0.179272 +	0.180322 +	0.182025 +	0,183619 +

Hypergon.

Sagittalstrahl.

	$w_0 = -10^\circ$	$w_0 = -30^\circ$	$w_0 = -50^\circ$	$w_0 = -70^\circ$
$\frac{n_3}{n_4} \cdot \frac{\cos\alpha_3}{\cos\beta_3}$	+ 1,511028	+ 1,514683	+ 1,520634	+ 1,526228
$1 - \frac{n_3}{n_4} \cdot \frac{\cos\alpha_3}{\cos\beta_3}$	— 0,511028	— 0,514683	— 0,520634	— 0,526228
$\lg\left(1 - \frac{n_3}{n_4} \cdot \frac{\cos\alpha_3}{\cos\beta_3}\right)$	9,708444 —	9,711540 —	9,716533 —	9,721174 —
$\lg\cos\beta_3$	9,999751 +	9,997887 +	9,994876 +	9,992075 +
$\lg\frac{1}{r_3}$	1,066907 —	1,066907 —	1,066907 —	1,066907 —
$\lg\left[\frac{\cos\beta_3}{r_3}\left(1-\frac{n_3}{n_4}\cdot\frac{\cos\alpha_3}{\cos\beta_3}\right)\right]$	0,775102 +	0,776334 +	0,778316 +	0,780156 +
$\frac{\cos\beta_3}{r_3}\left(1 - \frac{n_3}{n_4} \cdot \frac{\cos\alpha_3}{\cos\beta_3}\right)$	+ 5,958025	+ 5,974943	+ 6,002275	+ 6,027757
$\frac{1}{\sigma_3} \cdot \frac{n_3}{n_4}$	— 4,893200	— 5,047656	— 5,327100	— 5,681914
$\frac{1}{\sigma^4}$	+ 1,064825	+ 0,927287	+ 0,675175	+ 0,345843
$\lg\frac{1}{\sigma^4}$	0,027278 +	9,967215 +	9,829417 +	9,538879 +
$\lg\sigma^4$	9,972722 +	0,032785 +	0,170583 +	0,461121 +
σ^4	+ 0,9391220	+ 1,078413	+ 1,481097	+ 2,891487
$-K_4$	— 0,9398725	— 1,085162	— 1,501145	— 2,911156
$\Delta\sigma^4$	— 0,0007505	— 0,006749	— 0,020048	— 0,019669
$\lg\Delta\sigma^4$	6,875351 —	7,829239 —	8,302071 —	8,293782 —
$\lg\cos w_4$	9,993351 +	9,937540 +	9,808116 +	9,534157 +
$\lg\Delta z_\sigma^4$	6,868702 —	7,766779 —	8,110187 —	7,827939 —
Δz_σ^4	— 0,00073910	— 0,0058449	— 0,012888	— 0,0067288

rgon.

Meridionalstrahl.

	$w_0 = -10^\circ$	$w_0 = -30^\circ$	$w_0 = -50^\circ$	$w_0 = -70^\circ$
$\lg\frac{1}{r_0}$	1,066907 +	1,066907 +	1,066907 +	1,066907 +
$\lg\frac{1}{\cos\beta_0}$	0,000109 +	0,000905 +	0,002131 +	0,003215 +
$\lg\left(1 - \frac{n_0}{n_1} \cdot \frac{\cos\alpha_0}{\cos\beta_0}\right)$	9,529172 +	9,531172 +	9,534257 +	9,536989 +
$\frac{1}{\cdot\cos\beta_0}\left(1 - \frac{n_0}{n_1} \cdot \frac{\cos\alpha_0}{\cos\beta_0}\right)\Big] = \lg\frac{1}{t'}$	0,596188 +	0,59898		

Hypergon.

Meridionalstrahl.

	$w_0 = -10^0$	$w_0 = -30^0$	$w_0 = -50^0$	$w_0 = -70^0$
$\lg t'$	9,403812 +	9,401016 +	9,396705 +	9,392889 +
t'	+ 0,2534029	+ 0,2517771	+ 0,2492900	+ 0,2471094
$-\frac{h_0 - h_1}{\sin w_1}$	− 0,0217389	− 0,0187565	− 0,0132238	− 0,0059444
t_1	+ 0,2316640	+ 0,2330206	+ 0,2360662	+ 0,2411650
$\lg t_1$	9,364859 +	9,367394 +	9,373034 +	9,382314 +
$\lg \frac{1}{t_1}$	0,635141 +	0,632606 +	0,626966 +	0,617686 +
$\lg \frac{n_1}{n_2}$	0,179132 +	0,179132 +	0,179132 +	0,179132 +
$\lg \cos^2 \alpha_1$	9,999696 +	9,997548 +	9,994532 +	9,992352 +
$\lg \frac{1}{\cos^2 \beta_1}$	0,000694 +	0,005614 +	0,012578 +	0,017652 +
$\lg \left(\frac{1}{t_1} \cdot \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{\cos^2 \alpha_1}{\cos^2 \beta_1}\right)$	0,814663 +	0,814900 +	0,813208 +	0,806822 +
$\lg \frac{1}{r_1}$	1,063878 +	1,063878 +	1,063878 +	1,063878 +
$\lg \frac{1}{\cos \beta_1}$	0,000347 +	0,002807 +	0,006289 +	0,008826 +
$\lg \left(1 - \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{\cos \alpha_1}{\cos \beta_1}\right)$	9,708605 −	9,712690 −	9,718464 −	9,722665 −
$\lg \left[\frac{1}{r_1 \cdot \cos \beta_1} \left(1 - \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{\cos \alpha_1}{\cos \beta_1}\right)\right]$	0,772830 −	0,779375 −	0,788631 −	0,795369 −
$\frac{1}{t_1} \cdot \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{\cos^2 \alpha_1}{\cos^2 \beta_1}$	+ 6,526243	+ 6,539800	+ 6,504414	+ 6,409471
$+\frac{1}{r_1 \cdot \cos \beta_1} \left(1 - \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{\cos \alpha_1}{\cos \beta_1}\right)$	− 5,926929	− 6,016929	− 6,146543	− 6,242650
$\frac{1}{t''}$	+ 0,599314	+ 0,512871	+ 0,357871	+ 0,166821
$\lg \frac{1}{t''}$	9,777655 +	9,710008 +	9,553726 +	9,222251 +
$\lg t''$	0,222345 +	0,289992 +	0,446274 +	0,777749 +
t''	+ 1,668573	+ 1,949809	+ 2,794306	+ 5,994443
$-\frac{h_1 - h_2}{\sin w_2}$	− 0,138430	− 0,142751	− 0,150878	− 0,161754
t_2	+ 1,530143	+ 1,807058	+ 2,643428	+ 5,832689
$\lg t_2$	0,184732 +	0,256972 +	0,422167 +	0,765869 +

pergon.

Meridionalstrahl.

	$w_0 = -10^0$	$w_0 = -30^0$	$w_0 = -50^0$	$w_0 = -70^0$
$\lg \frac{1}{t_2}$	9,815268 +	9,743028 +	9,577833 +	9,234131 +
$\lg \frac{n_2}{n_3}$	9,820868 +	9,820868 +	9,820868 +	9,820868 +
$\lg \cos^2 \alpha_2$	9,999308 +	9,994472 +	9,987894 +	9,983400 +
$\lg \frac{1}{\cos^2 \beta_2}$	0,000304 +	0,002414 +	0,005262 +	0,007198 +
$\lg\left(\frac{1}{t_2} \cdot \frac{n_2}{n_3} \cdot \frac{\cos^2 \alpha_2}{\cos^2 \beta_2}\right)$	9,635748 +	9,560782 +	9,391857 +	9,045597 +
$\lg \frac{1}{r_2}$	1,063878 —	1,063878 —	1,063878 —	1,063878 —
$\lg \frac{1}{\cos \beta_2}$	0,000152 +	0,001207 +	0,002631 +	0,003599 +
$\lg\left(1 - \frac{n_2}{n_3} \cdot \frac{\cos \alpha_2}{\cos \beta_2}\right)$	9,529276 +	9,531932 +	9,535522 +	9,537960 +
$\frac{1}{r_2 \cdot \cos \beta_2} \cdot \left(1 - \frac{n_2}{n_3} \cdot \frac{\cos \alpha_2}{\cos \beta_2}\right)\Big]$	0,593306 —	0,597017 —	0,602031 —	0,605437 —
$\frac{1}{r_2 \cdot \cos \beta_2} \cdot \left(1 - \frac{n_2}{n_3} \cdot \frac{\cos \alpha_2}{\cos \beta_2}\right)$	— 3,920182	— 3,953818	— 3,999736	— 4,031227
$+ \frac{1}{t_2} \cdot \frac{n_2}{n_3} \cdot \frac{\cos^2 \alpha_2}{\cos^2 \beta_2}$	+ 0,432263	+ 0,363733	+ 0,246523	+ 0,111070
$\frac{1}{t'''}$	— 3,487919	— 3,590085	— 3,753213	— 3,920157
$\lg \frac{1}{t'''}$	0,542566 —	0,555105 —	0,574403 —	0,593303 —
$\lg t'''$	9,457434 —	9,444895 —	9,425597 —	9,406697 —
t'''	— 0,2867040	— 0,2785447	— 0,2664388	— 0,2550924
$-\frac{h_2 - h_3}{\sin w_3}$	— 0,0217386	— 0,0187461	— 0,0131646	— 0,0058107
t_3	— 0,3084426	— 0,2972908	— 0,2796034	— 0,2609031
$\lg t_3$	9,489175 —	9,473181 —	9,446542 —	9,416479 —
$\lg \frac{1}{t_3}$	0,510825 —	0,526819 —	0,553458 —	0,583521 —
$\lg \frac{n_3}{n_4}$	0,179132 +	0,179132 +	0,179132 +	0,179132 +
$\lg \cos^2 \alpha_3$	9,999782 +	9,998154 +	9,995538 +	9,993124 +
$\lg \frac{1}{\cos^2 \beta_3}$	0,000498 +	0,004226 +	0,010248 +	0,015850 +
$\lg\left(\frac{1}{t_3} \cdot \frac{n_3}{n_4} \cdot \frac{\cos^2 \alpha_3}{\cos^2 \beta_3}\right)$	0,690237 —			0,771627 —

Hypergon.

Meridionalstrahl.

	$w_0 = -10^\circ$	$w_0 = -30^\circ$	$w_0 = -50^\circ$	$w_0 = -70^\circ$
$\lg \frac{1}{r_3}$	1,066907 —	1,066907 —	1,066907 —	1,066907 —
$\lg \frac{1}{\cos\beta_3}$	0,000249 +	0,002113 +	0,005124 +	0,007925 +
$\lg\left(1 - \frac{n_3}{n_4} \cdot \frac{\cos\alpha_3}{\cos\beta_3}\right)$	9,708444 —	9,711540 —	9,716533 —	9,721174 —
$\lg\left[\frac{1}{r_3 \cdot \cos\beta_3}\left(1 - \frac{n_3}{n_4} \cdot \frac{\cos\alpha_3}{\cos\beta_3}\right)\right]$	0,775600 +	0,780560 +	0,788564 +	0,796006 +
$\frac{1}{r_3 \cdot \cos\beta_3}\left(1 - \frac{n_3}{n_4} \cdot \frac{\cos\alpha_3}{\cos\beta_3}\right)$	+ 5,964857	+ 6,033371	+ 6,145600	+ 6,251814
$\frac{1}{t_3} \cdot \frac{n_3}{n_4} \cdot \frac{\cos^2\alpha_3}{\cos^2\beta_3}$	— 4,900463	— 5,108944	— 5,474900	— 5,910538
$\frac{1}{t^4}$	+ 1,064394	+ 0,924427	+ 0,670700	+ 0,341276
$\lg \frac{1}{t^4}$	0,027103 +	9,965873 +	9,826528 +	9,533106 +
$\lg t^4$	9,972897 +	0,034127 +	0,173472 +	0,466894 +
t^4	+ 0,939500	+ 1,081750	+ 1,490979	+ 2,930180
$-K^4$	— 0,9398725	— 1,085162	— 1,501145	— 2,911156
Δt^4	— 0,0003725	— 0,003412	— 0,010166	+ 0,019024
$\lg \Delta t^4$	6,571126 —	7,533009 —	8,007150 —	8,279302 +
$\lg \cos w_4$	9,993351 +	9,937540 +	9,808116 +	9,534157 +
$\lg \Delta z_t^4$	6,564477 —	7,470549 —	7,815266 —	7,813459 +
Δz_t^4	— 0,00036684	— 0,0029549	— 0,0065353	+ 0,0065082

§ 119. Die Bestimmung des Ortes der natürlichen Blende für ein zentriertes System von fünf brechenden Flächen.

Wir haben uns bei den Zahlenbeispielen in den §§ 115 und 118 bereits der Fundamentalstrahlen bedient. Doch geschah die Bestimmung des Ortes der natürlichen Blende dort in besonders einfacher Weise und wir hatten nicht nötig zu seiner Bestimmung die Formeln des § 93 heranzuziehen.

Um jedoch zu zeigen, wie sich die Rechnung bei einem unsymmetrischen aus mehreren Flächen bestehenden Systeme gestaltet, geben wir auch dafür ein Beispiel, das in dem Rechenbureau der optischen Werkstätte von C. P. Goerz in Friedenau ausgeführt ist.

Zunächst transformieren wir die in § 89 bis 93 gegebenen Formeln auf die in diesem Kapitel angewandte Bezeichnungsweise und erhalten für die Größen $A_\varkappa$ [Gleichung (259) S. 150] $B_\varkappa$ [Gleichung (260a) S. 151] $C_\varkappa$ [Gleichung (275) S. 156] und $Q_\varkappa$ [Gleichung (260) S. 150] unter der Voraussetzung, daß $n_0 = 1$ ist:

$$(331)\begin{cases} A_0 = 1\,, \\ A_1 = \dfrac{p_1}{p'}\,, \\ A_2 = \dfrac{p_1}{p'}\cdot\dfrac{p_2}{p''}\,, \\ A_3 = \dfrac{p_1}{p'}\cdot\dfrac{p_2}{p''}\cdot\dfrac{p_3}{p'''} \\ \text{usw.} \end{cases} \qquad (332)\begin{cases} B_0 = \dfrac{1}{n_1\cdot p'} - \dfrac{1}{p_0}\,, \\ B_1 = \dfrac{1}{n_2\cdot p''} - \dfrac{1}{n_1\cdot p_1}\,, \\ B_2 = \dfrac{1}{n_3\cdot p'''} - \dfrac{1}{n_2\cdot p_2} \\ \text{usw.} \end{cases}$$

$$(333)\begin{cases} C_0 = 0\,, \\ C_1 = \dfrac{d_1}{n_1 A_1}\,, \\ C_2 = \dfrac{d_2}{n_2 A_1 A_2} + C_1\,, \\ C_3 = \dfrac{d_3}{n_3 A_2 A_3} + C_2 \\ \text{usw.} \end{cases} \qquad (334)\begin{cases} Q_0 = \dfrac{1}{r_0} - \dfrac{1}{p_0} = n_1\left(\dfrac{1}{r_0} - \dfrac{1}{p'}\right), \\ Q_1 = n_1\left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{p_1}\right), \\ Q_2 = n_2\left(\dfrac{1}{r_2} - \dfrac{1}{p_2}\right), \\ Q_3 = n_3\left(\dfrac{1}{r_3} - \dfrac{1}{p_3}\right) \\ \text{usw.} \end{cases}$$

Dann ergibt sich z gemäß § 93 Gl. (277) aus der linearen Gleichung:

$$(335)\quad \begin{cases} A_0^2 B_0 Q_0 \,[A_0^2 Q_0 + z(1 + A_0^2 C_0 Q_0)] + \\ A_1^2 B_1 Q_1 \,[A_1^2 Q_1 + z(1 + A_1^2 C_1 Q_1)] + \text{usw.} = 0 \end{cases}$$

und es ist für $p_0 = \infty$ der Abstand x_1 des Mittelpunktes der natürlichen Blende im Objektraume

$$(336)\qquad x_1 = -\frac{1}{z}\,.$$

Die Durchrechnung wird für ein aus vier Linsen verkittetes Objektiv von der Brennweite Eins ausgeführt, dessen Konstruktionsdaten folgende sind:

Logarithm. d. Radien	Logarithm. d. Dicken	Brechungsexp.	Logarithm. der Brechungsexp.
$\lg r_0 = 9{,}130768 -$	$\lg d_1 = 8$	$n_1 = 1{,}61546$	0,208296
$\lg r_1 = 8{,}838632 -$	$\lg d_2 = 8{,}079181$	$n_2 = 1{,}49670$	0,175185
$\lg r_2 = 8{,}738024 -$	$\lg d_3 = 7{,}698970$	$n_3 = 1{,}55045$	0,190458
$\lg r_3 = 9{,}354578 +$	$\lg d_4 = 8{,}255273$	$n_4 = 1{,}61375$	0,207837
$\lg r_4 = 9{,}175190 -$			

Wie in den §§ 109 und 112 gehört jede Vertikalreihe einer Fläche an. Die Indizes der Formeln am linken Rande beziehen sich auf die erste Fläche mit dem Index 0. Zunächst erfolgt die Feststellung der paraxialen Schnittweiten durch sukzessive Anwendung der Gleichungen:

$$\frac{1}{p'} = \frac{1}{p_0} \cdot \frac{n_0}{n_1} + \frac{1}{r_0}(n_1 - n_0)\frac{1}{n_1}\,; \qquad \frac{1}{p_1} = \frac{1}{p'} \cdot \frac{1}{1 - \frac{d_1}{p'}}\,.$$

$p_0 = \infty$

	0	1	2	3	4
$\lg \frac{1}{p_0}$		0,438061 —	0,248109 —	0,364694 —	0,296333 —
$\lg \frac{n_0}{n_1}$		0,033161 +	9,984677 +	9,982621 +	0,207837 +
$\lg \frac{n_0}{n_1} \cdot \frac{1}{p_0}$		0,471222 —	0,232786 —	0,347315 —	0,504170 —
$\lg \frac{1}{r_0}$	0,869232 —	1,161368 —	1,261976 —	0,645422 +	0,824810 —
$\lg (n_1 - n_0)$	9,789200 +	9,074670 —	8,730378 +	8,801404 +	9,787992 —
$\lg \frac{1}{n_1}$	9,791704 +	9,824865 +	9,809542 +	9,792163 +	0
$\lg \frac{1}{r_0} \cdot \frac{n_1 - n_0}{n_1}$	0,450136 —	0,060903 +	9,801896 —	9,238989 +	0,612802 +
$\frac{n_0}{n_1} \cdot \frac{1}{p_0}$	0	— 2,959527	— 1,709173	— 2,224925	— 3,192786
$\frac{1}{r_0} \cdot \frac{n_1 - n_0}{n_1}$	— 2,819267	+ 1,150543	— 0,633718	+ 0,173376	+ 4,100173
$\frac{1}{p'} =$	— 2,819267	— 1,806984	— 2,342891	— 2,051549	+ 0,907387
$\lg \frac{1}{p'}$	0,450136 —	0,257435 —	0,369752 —	0,312062 —	9,957793
$\lg d_1$	8 +	8,079181 +	7,698970 +	8,255273 +	
$\lg \frac{d_1}{p'}$	8,450136 —	8,336616 —	8,068722 —	8,567355 —	
$1 - \frac{d_1}{p'}$	+ 1,028193	+ 1,021708	+ 1,011714	+ 1,036928	
$\lg \frac{1}{p'}$	0,450136 —	0,257435 —	0,369752 —	0,312062 —	
$\lg \left(1 - \frac{d_1}{p'}\right)$	0,012075	0,009326	0,005068	0,015749	
$\lg \frac{1}{p_1} =$	0,438061 —	0,248109 —	0,364694 —	0,296333 —	

$p' = -0{,}3547025$	$p_1 = -0{,}3647025$
$p'' = -0{,}5527963$	$p_2 = -0{,}5647950$
$p''' = -0{,}4268230$	$p_3 = -0{,}4318230$
$p^4 = -0{,}4874367$	$p_4 = -0{,}5054367$
$p^5 = +1{,}102064$	

Berechnung der Größen A gemäß Gleichung (331):

$\lg p_1$		9,561939 —	9,751891 —	9,635306 —	9,703667 —
$\lg p'$		9,549864 —	9,742565 —	9,630248 —	9,687918 —
		0,012075 +	0,009326 +	0,005058 +	0,015749 +
			0,012075	0,021401	0,026459
			0,009326	0,005058	0,015749
$\lg A_0$	$\lg A_1$	0,012075 +	0,021401 +	0,026459 +	0,042208 +
$A_0 = 1$	A_1	+ 1,028193	1,050512	1,062818	1,102067

Berechnung der Größen B gemäß Gleichung (332):

$\lg p'$	9,549864 —	9,742565 —	9,630248 —	9,687918 —	0,042207 +
$\lg n_1$	0,208296 +	0,175135	0,190458	0,207837	0
$(\lg p' \cdot n_1)$	9,758160 —	9,917700 —	9,820706 —	9,895755 —	0,042207 +
$\lg \frac{1}{p' \cdot n_1}$	0,241040 —	0,082300 —	0,179294 —	0,104245 —	9,957793 +
$\frac{1}{p' \cdot n_1}$	— 1,745180	— 1,208647	— 1,511103	— 1,271291	+ 0,9073880
$\lg p_1$		9,561939 —	9,751891 —	9,635306 —	9,703667 —
$\lg n_1$		0.208296	0,175135	0,190458	0,207837
$(\lg n_1 \cdot p_1)$		9,770235 —	9,927026 —	9,825764 —	9,911504 —
$\lg \frac{1}{n_1 \cdot p_1}$		0,229765 —	0,072974 —	0,174236 —	0,088496 —
$\frac{1}{n_1 \cdot p_1}$		— 1,697324	— 1,182970	— 1,493607	— 1,226017
$\frac{1}{p' \cdot n_1}$	— 1,745180	— 1,208647	— 1,511103	— 1,271291	+ 0,907388
$-\frac{1}{p_0}$	0	+ 1.697324	+ 1,182970	+ 1,493607	+ 1,226017
B_0	— 1,745180	+ 0,488677	— 0,328138	+ 0.222216	+ 2.133405
$\lg B_0$	0,241840 —	9,689022 +	9,516060 —		

Berechnung der Invarianten Q gemäß Gleichung (334):

$\frac{1}{r_0}$	$-7{,}4$	$-14{,}5$	$-18{,}28$	$+4{,}42$	$-6{,}680517$
$-\frac{1}{p'}$	$+2{,}819267$	$+1{,}808984$	$+2{,}342891$	$+2{,}051549$	$-0{,}907387$
$\frac{1}{r_0}-\frac{1}{p'}$	$-4{,}580733$	$-12{,}691016$	$-15{,}937109$	$+6{,}471549$	$-7{,}587904$
$\lg\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p'}\right)$	0,660935 —	1,103501 —	1,202410 —	0,811008 +	0,880122 —
$\lg n_1$	0,208296	0,175135	0,190458	0,207837	0
$\lg Q_0$	0,869231 —	1,278636 —	1,392868 —	1,018845 +	0,880122 —
Q_0	$-7{,}4$	$-18{,}99487$	$-24{,}70972$	$+10{,}44348$	$-7{,}5879$

Berechnung der Größen C gemäß Gleichung (333):

$\lg d_1$	8 +	8,079181 +	7,698970 +	8,255273 +
$\lg\frac{1}{n_1}$	9,791704 +	9,824865 +	9,809542 +	9,792163 +
$\lg\frac{1}{A}$	0	9,987925 +	9,978599 +	9,973541 +
$\lg\frac{1}{A_1}$	9,987925 +	9,978599 +	9,973541 +	9,957792 +
	7,779629 +	7,870570 +	7,460652 +	7,978769 +
	0,00602045	0,00742283	0,00288837	0,0095229
	0	0,00602045	0,01344328	0,0163317
C_0	$+0{,}00602045$	$+0{,}01344328$	$+0{,}01633165$	$+0{,}0258546$
$\lg C_0$	7,779629 +	8,128505 +	8,213030 +	8,412538 +

Berechnung der Koeffizienten von z und der von z freien Glieder der Gleichung (335):

$\lg A_0^2$	0	0,024150 +	0,042802 +	0,052918 +	0,084416 +
$\lg C_0$	∞	7,779629 +	8,128505 +	8,213030 +	8,412538 +
$\lg Q_0$	0,869231 —	1,278636 —	1,392868 —	1,018845 +	0,880122 —
$\lg A_0^2 C_0 Q_0$	∞	9,082415 —	9,564175 —	9,284793 +	9,377076 —
$A_0^2 C_0 Q_0$	0	$-0{,}1208969$	$-0{,}366585$	$+0{,}1926605$	$-0{,}2382737$
$1+A_0^2 C_0 Q_0$	1	$+0{,}8791031$	$+0{,}633415$	$+1{,}1926605$	$+0{,}7617263$

$\lg A_0^2$	0	0,024150 +	0,042802 +	0,052918 +	0,084416 +
$\lg Q_0$	0,869231 —	1,278636 —	1,392868 —	1,018845 +	0,880122 —
$\lg A_0^2 Q_0$	0,869231 —	1,302786 —	1,435670 —	1,071763 +	0,964538 —

$\lg A_0^2$	0	0,024150 +	0,042802 +	0,052918 +	0,084416 +
$\lg B_0$	0,241840 —	9,689022 +	9,516050 —	9,346971 +	0,320073 +
$\lg Q_0$	0,869231 —	1,278636 —	1,392868 —	1,018845 +	0,880122 —
$\lg A_0^2 B_0 Q_0$	1,111071 +	0,991808 —	0,951720 +	0,418734 +	1,293611 —

$\lg A_0^2 B_0 Q_0$	1,111071 +	0,991808 —	0,951720 +	0,418734 +	1,293611 —
$\lg A_0^2 Q_0$	0,869231 —	1,302786 —	1,435670 —	1,071763 +	0,964538 —
$\lg (A_0^2 B_0 Q_0 \cdot A_0^2 Q_0)$	1,980302 —	2,294594 +	2,387390 —	1,490497 +	2,258149 +

$\lg A_0^2 B_0 Q_0$	1,111071 +	0,991808 —	0,951720 +	0,418734 +	1,293611 —
$\lg (1 + A_0^2 C_0 Q_0)$	0	9,944040 +	9,801689 +	0,076517 +	9,881799 +
$\mathrm{l}_0^2 B_0 Q_0 \cdot (1 + A_0^2 C_0 Q_0)$	1,111071 +	0,935848 —	0,753409 +	0,495251 +	1,175410 —

$B_0 Q_0 \cdot (1 + A_0^2 C_0 Q_0)$	+ 12,91430	— 8,62676	+ 5,66773	+ 3,12789	— 14,97648
$A_0^2 B_0 Q_0 \cdot A_0^2 Q_0$	— 95,56575	+ 197,0582	— 244,0000	+ 30,93836	+ 181,1963

Summation über die von z freien Glieder.

+ 197,0582	— 244
+ 30,9384	— 95,5658
+ 181,1963	— 339,5658
+ 409,1929	
— 339,5658	
+ 069,6271	

(lg = 1,842779 +)

Summation über die Koeffizienten von z.

+ 12,91430	— 8,62676
+ 5,66773	— 14,97648
+ 3,12789	— 23,60324
+ 21,70992	
— 23,60324	
— 1,89332	

(lg = 0,277224 —)

Die Gleichung (335) zur Berechnung von z nimmt dann die Gestalt an:

$$+ 69,6271 \qquad - 1,89332 \cdot z = 0\,,$$

also wird:

$$z = \frac{69,6271}{1,89332} = +\,36,7752$$

und demnach:

$$x_1 = -\frac{1}{z} = \underline{\underline{-\,0,027192}}\,,$$

wodurch die Entfernung x des Mittelpunktes der natürlichen Blende von der ersten brechenden Fläche (im Objektraume) bestimmt ist.

Spamersche Buchdruckerei in Leipzig.